FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
B. Hahn

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

10. Übung zu 'Höhere Mathematik für Ingenieure II'
Sommersemester 2012

1. Aufgabe Taylorreihe — 2 + 2 + 1 = 5 Punkte

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) := \sin x.$$

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe aus a) gegen f konvergiert.
Hinweis: Verwenden Sie die Restglieddarstellung nach Lagrange.

c) Mit Hilfe der **Taylorpolynome** können Funktionsauswertungen von f näherungsweise berechnet werden.
Welchen Grad $n \in \mathbb{N}$ müsste das Taylorpolynom besitzen, um den Funktionswert $\sin(2)$ bis auf einen Fehler $\epsilon < 10^{-4}$ zu bestimmen?

2. Aufgabe Taylorreihe II — 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

Gegeben sei

$$g(x) := \frac{1}{1+x}.$$

a) Ermitteln Sie die Taylorreihe von g mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und begründen Sie, dass diese auf $(-1, 1)$ gegen g konvergiert.
Hinweis: Geometrische Reihe.

b) Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die Ableitungen $g^{(n)}(0),\ n \in \mathbb{N}$.

3. Aufgabe Kondition — 1 + 2 = 3 Punkte

Berechnen Sie die (relativen) Konditionszahlen der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) := \sqrt{x}, \quad x > 0,$

b) $f_2(x) := \ln x, \quad x > 0.$

Ermitteln Sie jeweils, für welche x die Funktionsauswertungen gut bzw. schlecht konditioniert sind.

4. Aufgabe Stabilität **2 + 0.5 + 1.5 + 1 = 5 Punkte**

Für $n \in \mathbb{N}$ sollen die Integrale

$$I_n := \int_0^1 x^n e^{x-1}\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden. Hierbei gilt die Rekursionsformel

$$I_n = 1 - n\,I_{n-1}, \quad I_0 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Wegen $I_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kann der Startwert in einem Computer nicht exakt berechnet werden. Man startet also mit einem Wert $\tilde{I}_0 = I_0 + \delta$.

a) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für das n−te Folgenglied $\tilde{I}_n$, wenn Sie die Rekursion mit dem Startwert $\tilde{I}_0$ durchlaufen.

b) Treffen Sie eine Aussage über die Stabilität des Algorithmus. Begründen Sie Ihre Antwort.

Einen weiteren Algorithmus zur Berechnung von I_n erhält man mittels *Rückwärtsrekursion*. Dabei wählt man $m \in \mathbb{N}$ sowie einen geeigneten Startwert I_{m+n} und berechnet I_n mittels

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}.$$

Auch in diesem Fall kann nur mit einem fehlerbehafteten Wert $\tilde{I}_{m+n} = I_{m+n} + \delta$ begonnen werden.

c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie durch Induktion, dass für $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le m + n$ gilt:

$$\tilde{I}_{m+n-k} = I_{m+n-k} + (-1)^k \frac{(m+n-k)!}{(m+n)!}\delta.$$

Wie sieht damit die Darstellung für $\tilde{I}_n$ aus?

d) Welches der beiden Verfahren sollte man für die numerische Berechnung von I_n in Hinsicht auf Stabilität verwenden?

Abgabe am Mittwoch 11. Juli vor der Vorlesung.