



11. Übung zu 'Höhere Mathematik für Ingenieure II'
Sommersemester 2012

1. Aufgabe Kondition und Stabilität

1.5 + 1.5 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte

Gegeben sei

$$f(x) := \frac{1 - \cos 2x}{2x}.$$

- a) Berechnen Sie die relative Konditionszahl der Funktionsauswertung von f an der Stelle x .

Hinweis: Es gilt

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

- b) Zeigen Sie, dass die Funktionsauswertung für $x \rightarrow 0$ gut konditioniert ist.

Die Auswertung von f an der Stelle x kann mit dem (naheliegenden) Algorithmus

$$u_1 := 2x, \quad u_2 := \cos u_1, \quad u_3 := 1 - u_2, \quad u_4 := \frac{u_3}{u_1}$$

realisiert werden.

- c) Führen Sie den Algorithmus für $x = 10^{-3}$ durch, wenn pro Schritt nur 4 Nachkommastellen berücksichtigt werden können (d.h. runden Sie jeweils auf die vierte Nachkommastelle).

- d) Berechnen Sie den relativen Fehler

$$\frac{|\tilde{u}_4 - u_4|}{u_4}$$

der in *b*) errechneten Lösung \tilde{u}_4 und der exakten Lösung u_4 . (Für die exakte Lösung genügt Taschenrechnergenauigkeit). Geben Sie den Fehler in Prozent % an.

Was sagt dies über die Stabilität des Algorithmus aus?

- e) Formulieren Sie $f(x)$ geschickt um, so dass Sie einen stabileren Algorithmus erhalten. Erläutern Sie kurz, warum dieser in Hinsicht auf Stabilität zu bevorzugen ist.

2. Aufgabe Differentialgleichungen

3 + 3 = 6 Punkte

- a) Zeigen Sie:

$$y(x) = x + xe^x - x^2$$

löst das Anfangswertproblem

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = x^2 y.$$

Hinweis: Logarithmisches Integrieren.

3. Aufgabe Integration (Wiederholung)

2 + 2 = 4 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

b) $\int_0^1 \sqrt{x^2 - 1} dx.$

Abgabe am Mittwoch 18. Juli vor der Vorlesung.

Die **Anmeldung** zur ersten Klausur ist bis zum **23. Juli** über unsere Homepage möglich, bitte lesen Sie dazu auch das **Informationsblatt**.