



3. Übung zu 'Höhere Mathematik für Ingenieure II'
Sommersemester 2012

1. Aufgabe Grenzwert von Funktionen

1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte von Funktionen:

- a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$,
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x - 1}{2x^4 + x^3 - 5}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + x} - 2x$,
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(ax) - \ln(x))$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

2. Aufgabe Stetigkeit II

2.5 + 2.5 = 5 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_2(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Hinweis: Folgen- bzw. Einschließungskriterium.

3. Aufgabe Lipschitz - Stetigkeit

3 Punkte

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz - stetig*, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in D.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$$

Lipschitz-stetig ist. Geben Sie die *Lipschitz-Konstante* L explizit an.

Hinweis: Auf dem Definitionsbereich können Sie $|x + y|$ nach oben durch eine reelle Zahl abschätzen.

4. Aufgabe Zwischenwertsatz

1 + 2 + 1 = 4 Punkte

Wir wollen zeigen, dass die Gleichung

$$x = \cos x \quad (1)$$

im Intervall $[0, \pi]$ eine Lösung besitzt.

Betrachten Sie dazu die Funktion $h(x) := x - \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

- a) Überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes für die Funktion h erfüllt sind.
- b) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass h in $[0, \pi]$ eine Nullstelle besitzt.
- c) Schließen Sie daraus die Lösbarkeit von Gleichung (1).

Abgabe am Mittwoch 16. Mai vor der Vorlesung.