FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
B. Hahn

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

4. Übung zu 'Höhere Mathematik für Ingenieure II'
Sommersemester 2012

1. Aufgabe Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen 1 + 1 + 2 = 4 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Wir wollen die Funktion auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ untersuchen. Dazu seien im Folgenden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebige Nullfolgen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Betrachten Sie zunächst die Nullfolge $\left(\begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, 0)$.

b) Was gilt für den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(0, y_n)$?

c) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ dennoch nicht stetig ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Nullfolge $\left(\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$.

2. Aufgabe Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen II 2 + 2 = 4 Punkte

a) Zeigen Sie: Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

b) Sei f weiterhin die Funktion aus Aufgabe 1. Sind die Funktionen

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g_1(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+1} \\ e^x - \ln(y^2+1) \end{pmatrix},$$

$$g_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g_2(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x^2+y^2) \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Aufgabe Stetigkeit von Funktionenfolgen 1 + 0.5 + 1 + 1.5 = 4 Punkte

Wir betrachten die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{x}{\frac{1}{n} + |x|}.$$

a) Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n stetig ist.

b) Für $x = 0$ erhalten wir die reelle Zahlenfolge $a_n = f_n(0)$. Berechnen Sie ihren Grenzwert.

c) Um die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, soll nun obige Überlegung für jedes beliebige $x \in \mathbb{R}$ durchgeführt werden.

   Nehmen Sie dazu $x \neq 0$ als feste Zahl an und berechnen Sie den Grenzwert der Folge $b_n = f_n(x)$.

d) Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen der Grenzfunktion f.

4. Aufgabe Differentiation 1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f_1(x) = x^2 e^{-\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$,

b) $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$,

c) $f_3(x) = \ln(\ln(x^4 + 1))$,

d) $f_4(x) = 10^x$.

Abgabe am Mittwoch 23. Mai vor der Vorlesung.