FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
B. Hahn

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

5. Übung zu 'Höhere Mathematik für Ingenieure II'
Sommersemester 2012

1. Aufgabe Differenzierbarkeit — 2 + 2 = 4 Punkte

Betrachten Sie die Funktionen

$$f_1(x) = x\,|x|, \qquad f_2(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Stellen, an denen die Funktionen differenzierbar sind und geben Sie gegebenenfalls die Ableitungen an.

Sind die Funktionen f_1, f_2 stetig?

2. Aufgabe Ableitung der Umkehrfunktion — 2 + 1 + 1 = 4 Punkte

Betrachten Sie die Funktion

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$$

und die zugehörige Umkehrabbildung

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung $(\tan)'$ und zeigen Sie, dass tan streng monoton wachsend und stetig ist.

b) Begründen Sie, dass auch arctan in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung im Punkt $x_0 = \tan(0)$.

c) Bestimmen Sie die Ableitung $(\arctan)'(x_0)$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass gilt $(\tan)'(x) = 1 + (\tan x)^2$.

3. Aufgabe Extremwerte **0.5 + 1 + 2 + 0.5 = 4 Punkte**

Zur Herstellung einer zylinderförmigen Konservendose mit Volumen $V = 250$ ml soll so wenig Material wie möglich verwendet werden. Wir wollen nun bestimmen, wie Radius und Höhe der Dose zu wählen sind, damit der Materialverbrauch möglichst gering ist.

a) Stellen Sie zunächst eine Formel für das Volumen und die zu minimierende Oberfläche des Zylinders auf.

b) Verwenden Sie die Nebenbedingung $V = 250$ ml, um eine Formel für die Oberfläche zu erhalten, die nur noch vom Radius r abhängt.

c) Bestimmen Sie die globalen Minima dieser Funktion.

d) Bei welchem Radius und welcher Höhe ist der Materialverbrauch minimal?

4. Aufgabe Grenzwert von Funktionen II **1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte**

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte von Funktionen:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$,

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} \ln x$,

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x}$,

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Abgabe am Mittwoch 30. Mai vor der Vorlesung.