



1. Übung zu „Höhere Mathematik für Ingenieure IV“  
Vorlesungsteil A, Sommersemester 2012

1. Aufgabe Lineare Abbildungen

0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2 Punkte

Welche der folgenden Gleichungen sind linear? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

- a)  $f'(x) = x^2$ , gesucht:  $f$
- b)  $\int_0^x (x-y)f(y) dy = x^3$ , gesucht:  $f$
- c)  $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} x = y$ , gesucht:  $x$
- d)  $\begin{pmatrix} 3x^2 + 2xy \\ \sin(x) \cdot \ln(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ e^x \end{pmatrix}$ , gesucht:  $(x, y)$

2. Aufgabe Banachscher Fixpunktsatz I

1 + 2 + 1 = 4 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 + 7 - e^x.$$

- a) Bestimmen Sie anhand einer Skizze die ungefähre Lage der Nullstellen.
- b) Geben Sie für jede Nullstelle mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes eine Iterationsvorschrift an, so dass die Folgen gegen die jeweiligen Nullstellen konvergieren. Beweisen Sie Ihre Aussagen.
- c) Wie viele Iterationsschritte sind a priori nötig, um die negative Nullstelle auf 6 Nachkommastellen exakt zu bestimmen?

3. Aufgabe Banachscher Fixpunktsatz II

4 Punkte

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}) \\ y = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

$$\text{in } D = \{(x, y) : |x|, |y| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass dieses Gleichungssystem in  $D$  genau eine Lösung besitzt.