



4. Übung zu „Höhere Mathematik für Ingenieure IV“
Vorlesungsteil A, Sommersemester 2012

1. Aufgabe Konsistenzordnung, Klausur 2011

5 Punkte

Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y), & t > 0, \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

wird die explizite Mittelpunktsregel

$$y_{k+1} = y_k + h f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right)$$

verwendet. Berechnen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.

Hinweis: Fassen Sie in der Darstellung des lokalen Diskretisierungsfehlers die Terme mit Faktor h^2 in der O -Notation zusammen, d.h. die genaue Darstellung dieser Terme ist nicht erforderlich.

2. Aufgabe Stabilität

5 Punkte

Die Verfahrensfunktion der Methode von Heun zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = f(t, y), \quad t > t_0, \quad y(t_0) = y_0$$

ist bekanntlich

$$\Phi(t_k, y_k, h) = \frac{1}{2} f(t_k, y_k) + \frac{1}{2} f\left(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)\right).$$

Die Funktion f erfülle eine L-Bedingung bezüglich y mit Lipschitz-Konstante $L > 0$.

Beweisen Sie die Stabilität des Verfahrens, indem Sie eine L-Bedingung der Verfahrensfunktion bezüglich des zweiten Arguments zeigen.

Hinweis: Verwenden Sie mehrfach die L-Bedingung von f bezüglich der zweiten Variablen und die Dreiecksungleichung $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Abgabe am Dienstag, 12.06.2012 vor der Vorlesung.