



5. Übung zu „Höhere Mathematik für Ingenieure IV“
Vorlesungsteil A, Sommersemester 2012

1. Aufgabe Konsistenzordnung von Runge – Kutta – Verfahren

5 Punkte

Gegeben sei das allgemeine explizite Runge – Kutta – Verfahren der Stufe $s = 2$. Das entsprechende Butcher-Schema lautet:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten c_2, a_{21}, b_1 und b_2 derart, dass das resultierende Verfahren maximale Konsistenzordnung besitzt.

Bemerkung: Einer der vier Parameter ist frei wählbar. Setzen Sie daher $b_2 = \alpha$, nachdem Sie die Bedingungsgleichungen aufgestellt haben, und bestimmen Sie die restlichen Koeffizienten in Abhängigkeit von α .

2. Aufgabe Runge – Kutta – Verfahren, Klausur 2011

4 + 1 = 5 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= -2ty, & t \geq 1, \\ y(1) &= e^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{-t^2}$. (Dies muss nicht nachgerechnet werden.)

Zur numerischen Lösung soll folgendes Runge-Kutta-Verfahren der Stufe 3 mit Schrittweite $h = 0.5$ verwendet werden:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j) \\ k_2 &= f(t_j + h, y_j + hk_1) \\ k_3 &= f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{4}(k_1 + k_2)) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + 4k_3), \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

- Berechnen Sie unter Verwendung von (2) die ersten beiden Iterierten y_1 und y_2 . Rechnen Sie hierbei stets auf vier Nachkommastellen genau.
- Vergleichen Sie y_1 und y_2 mit den Werten der exakten Lösung des Anfangswertproblems (1), indem Sie die absoluten Fehler berechnen.

Abgabe am Dienstag, 26.06.2012 vor der Vorlesung.