UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

10. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **1 + 2 = 3 Punkte**

Es sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion auf einer offenen konvexen Menge $D \neq \emptyset$. Weiter sei

$$L := \sup_{x \in D} \|J_f(x)\| < \infty, \qquad (*)$$

wobei $J_f(x)$ die Jacobi-Matrix von f in x bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig auf D mit Lipschitz-Konstante L ist, d.h.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

b) Bleibt dieses Ergebnis richtig, wenn $(*)$ nicht erfüllt ist? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 2 **2 + 1 + 1 + 3 = 7 Punkte**

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi : I \to I$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ (d.h. eine Kontraktion). Gemäß des Banach'schen Fixpunktsatzes konvergiert die Iteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

für beliebiges $x_0 \in I$ gegen den eindeutigen Fixpunkt x^* von ϕ und es gilt die a-priori Schranke

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0|.$$

a) Wir betrachten nun die Funktion

$$F : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = -\tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{2}{15}x^{5/2} - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1.$$

Bestimmen Sie die eindeutige Maximumstelle von F approximativ durch eine geeignete Fixpunkteration, d.h. durch eine sinnvolle Wahl von ϕ ausgehend von F.

b) Wie viele Iterationen sind bei der Verwendung des Startwerts $x_0 = 0$ a-priori nötig, um eine Approximationsgüte von 10^{-7} zu garantieren?

Falls Sie Teil a) nicht lösen konnten, wählen Sie $L = \frac{1}{6}$.

c) Zeigen Sie die a-posteriori Fehlerabschätzung:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L}{1 - L}|x_k - x_{k-1}|.$$

d) Implementieren Sie die Fixpunktiteration für die Funktion ϕ aus Teil a) in Matlab. Geben sie dabei für $k = 1, 2, \ldots, 9$ die Werte $|x_k - x_{k-1}|$ als Lösung aus. Wie viele Iterationen werden bei Verwendung des Startwerts $x_0 = 0$ tatsächlich benötigt, um eine Approximationsgüte von 10^{-7} zu erreichen?

   Falls Sie Teil a) nicht lösen konnten, wählen Sie $\phi(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \frac{4}{3}x)$.

Aufgabe 3 **1 + 1 + 1 = 3 Punkte**

Gegeben sind die Funktionen

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = \arctan(x),$$

deren Nullstellen mit dem klassischen Newton-Verfahren

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k \in \mathbb{N}$$

nach Vorgabe eines Startwerts x_0 ermittelt werden sollen.

a) Berechnen Sie für die Funktion f_1 die ersten drei Newton-Iterierten mit dem Startwert $x_0 = 2$.

b) Wenden Sie das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = \frac{7}{5}$ und sechs Iterationen auf die Funktion f_2 an und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Wenden Sie nun das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Extremstelle auf die Funktion

$$f_3(x) = x^3 + 1$$

   an. Benutzen Sie den Startwert $x_0 = 1$ und führen Sie drei Iterationen durch. Interpretieren Sie auch hier das Ergebnis.

Aufgabe 4 **1 + 2 = 3 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei streng monoton wachsend, konvex, stetig differenzierbar und habe eine Nullstelle $\overline{x}$. Zeigen Sie:

a) Die Nullstelle von f ist eindeutig.

b) Die Newton-Iteration zur Nullstellenbestimmung von f konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen $\overline{x}$.

Hinweis: Betrachten Sie für Teil b) zunächst einen Startwert x_0 mit $f(x_0) \geq 0$ und zeigen Sie induktiv $f(x_k) \geq 0$ und $\overline{x} \leq x_k \leq x_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Abgabe am Donnerstag, 05.07.12 vor der Vorlesung.