**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FR 6.1 - Mathematik**
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

# 11. Übungsblatt zu 'Optimierung'

**Aufgabe 1** **1.5 + 2.5 + 2 = 6 Punkte**

Das Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist durch die Iterationsvorschrift

$$x^{k+1} = x^k - J_f(x^k)^{-1} f(x^k), \quad k \in \mathbb{N}$$

gegeben, wobei $J_f(x)$ die Jacobi-Matrix von $f$ in $x$ bezeichnet und $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ein Startwert ist.

a) Zu bestimmen ist eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^3 + y^2 &= 1 \\ xy + 2y^3 &= 2. \end{aligned}$$

Geben Sie eine geeignete Iterationsvorschrift an.

b) Gesucht sind ein Eigenwert mit zugehörigem normierten Eigenvektor einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Stellen Sie auch hier eine Iterationsvorschrift auf und erläutern Sie kurz, wie ein Schritt des Verfahrens abläuft.

c) Das Newton-Verfahren zur Minimierung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$x^{k+1} = x^k - H_f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei $H_f(x)$ die Hesse-Matrix von $f$ in $x$ bezeichnet. Betrachten Sie nun die quadratische und konvexe Zielfunktion $f(x) = \frac{1}{2} x^T C x + p^T x + \gamma$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 0.3.$$

Berechnen Sie den minimalen Zielfunktionswert. Führen Sie danach eine Iteration mit beliebigem Startwert durch und interpretieren Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 2** **1.5 + 2.5 = 4 Punkte**

Betrachtet wird das unrestringierte Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \tfrac{1}{2}x^T Cx + p^T x + \gamma$$

mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zur Lösung soll das Gradientenverfahren (Verfahren des steilsten Abstiegs) mit exakter Schrittweitensteuerung eingesetzt werden. Die Iterationsvorschrift ergibt sich somit als

$$x^{k+1} = x^k - \sigma_k d^k \quad \text{mit} \quad d^k = \nabla f(x^k) \quad \text{und} \quad \sigma_k = \arg\min_{\sigma>0} f(x^k - \sigma d^k).$$

wobei der Startwert $x^0$ beliebig vorgegeben sei.

a) Zeigen Sie die folgende Darstellung der optimalen Schrittweite im $k$-ten Iterationsschritt:

$$\sigma_k = \frac{(d^k)^T d^k}{(d^k)^T C d^k}.$$

b) Sei $C = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Diagonalmatrix (mit $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$), $p = (0, 0)^T$, $\gamma = 0$ und der Startvektor $x^0 = (\lambda_2, \lambda_1)$ gegeben. Leiten Sie induktiv eine Darstellung von $x^{k+1}$ durch $x^0$ für $k \in \mathbb{N}$ her. Was folgt daraus für

$$\frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|},$$

wenn Sie die Lösung $x^* = 0$ als bekannt voraussetzen?

**Aufgabe 3** **6 Punkte**

Zur Anwendung des Newton-Verfahrens auf Funktionen, deren Ableitungen analytisch schwierig bestimmbar sind, kann ein Approximationsschritt hinzugefügt werden. Beispielsweise kann die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch ein Polynom $p_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j t^j$ angenähert werden, um das Newton-Verfahren anschließend auf $p_\alpha$ anzuwenden. Nutzen Sie zur Bestimmung des Koeffizientenvektors dieses Polynoms die Tschebyscheff-Approximation aus Blatt 5, Aufgabe 4.

Betrachten Sie konkret die Situation

$$f : [-2, 4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-(x-1)^2}(x-1)^3 \arctan(x) \quad \text{(insbesondere gilt: } f(0) = 0\text{)}.$$

Verwenden Sie $m = 100$ äquidistante Stützstellen und approximieren Sie mit einem Polynom vom Grad $n = 20$. Verwenden Sie die Startwerte $x^0 = -1, -0.3, 0.4, 1, 2$, um mit 25 Iterationen unterschiedliche Nullstellen der ersten Ableitung zu finden. Plotten Sie die Funktion sowie das Approximationspolynom und seine Ableitungen, um die Berechnungen zu überprüfen.

**Abgabe am Donnerstag, 12.07.12 vor der Vorlesung.**