UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

12. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **8 Punkte**

Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= (x_1^2+x_2-11)^2+(x_1+x_2^2-7)^2 \quad \text{(Himmelblau-Funktion)},\\ f_2(x_1,x_2) &= 100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2 \quad \text{(Rosenbrock-Funktion)}.\end{aligned}$$

Zur Suche lokaler Minimumstellen soll das Gradientenverfahren eingesetzt werden:

$$x^{k+1} = x^k - \sigma_k d^k \quad \text{mit} \quad d^k = \nabla f(x^k).$$

Zur Schrittweitensteuerung wird die Amijo-Goldstein-Regel in der Form

$$\sigma_k = \beta^m, \quad \text{wobei} \quad m = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \mid f(x^k) - f(x^k - \beta^j d^k) \geq \delta\beta^j \nabla f(x^k)^T d^k\}$$

mit den Parametern $\beta = 0.5$ und $\delta = 0.2$ verwendet.
Brechen Sie die Verfahren ab, wenn die Norm von d_k die Schranke von 10^{-8} unterschreitet, spätestens jedoch nach 1000 Iterationen.

a) Stellen Sie die Funktion f_1 auf $[-5,5]\times[-5,5]$ und die Funktion f_2 auf $[-2,2]\times[-2,2]$ graphisch dar.

b) Implementieren Sie das beschriebene Abstiegsverfahren. Verwenden Sie für die Himmelblau-Funktion die Startwerte $x^0=(0,4)^T,\ x^0=(0,-1)^T,\ x^0=(1.5,2)^T,\ x^0=(-1,1)^T$.

c) Wenden Sie nun das Verfahren mit den Startwerten $x^0=(-1.5,3)^T$ und $x^0=(-0.5,4)^T$ auf die Rosenbrock-Funktion an, um näherungsweise die eindeutige Minimumstelle $x^*=(1,1)^T$ zu finden. Was stellen Sie hinsichtlich der benötigten Iterationszahl fest? Erklären Sie den Sachverhalt.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t) \;\; \text{für alle} \;\; t\in[0,1], \quad y(0)=y_0$$

mit Lösung $y(t)=y_0e^{\lambda t}$. Dabei sei der Anfangswert $y_0\neq 0$ bekannt, und y sei an den Stellen $t_i=\frac{i-1}{N-1},\ i=1,\ldots,N$ gegeben. Leiten Sie her, wie der Parameter λ mit einfachen Mitteln aus den Daten geschätzt werden kann. Sie können sich dabei beispielsweise an Blatt 11, Aufgabe 3 orientieren oder eine numerische Integrationsformel anwenden.

Aufgabe 3 **8 Punkte (davon 4 Bonuspunkte)**

Gegeben sind die folgenden $N = 10$ Messwerte, von denen man vermutet, dass sie von einer linearen Funktion $f_\lambda(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$ oder einer Exponentialfunktion $f_\lambda(t) = \lambda_1 e^{\lambda_2 t}$ stammen. Dabei sind die Parametern $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ unbekannt, und die (üblicherweise fehlerbehafteten) Messwerte liegen an den Stellen $t_i = i,\ i = 1, \dots, N$ vor:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	0.56	1.01	1.02	1.31	1.36	1.72	1.80	2.16	2.37	2.59

.

Zur Bestimmung der beiden Parameter für die jeweils getestete Ansatzfunktion wird ein *Gauß-Newton-Verfahren* herangezogen. Man definiert zunächst die Hilfsfunktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N, \quad F_i(\lambda) := f_\lambda(t_i) - f_i, \quad i = 1, \dots, N$$

und die zugehörige Fehlerquadratfunktion

$$\phi(\lambda) := \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (F_i(\lambda))^2.$$

Die Minimierung von ϕ führt bei Anwendung des Newton-Verfahrens und zusätzlicher Approximation der Hessematrix $H_\phi(\lambda)$ durch $(J_F(\lambda))^T J_F(\lambda)$ auf folgende Iterationsvorschrift:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \left(\left(J_F(\lambda^k) \right)^T J_F(\lambda^k) \right)^{-1} \left(J_F(\lambda^k) \right)^T F(\lambda^k).$$

a) Implementieren Sie das beschriebene Gauß-Newton-Verfahren und bestimmen Sie für die beiden Ansatzfunktionen mit dem Startvektor $\lambda^0 = (1, 1)^T$ jeweils einen möglichst geeigneten Parametervektor. Stellen Sie den Iterationsverlauf graphisch dar.

b) Welche Hypothese über die Gestalt der Funktion halten Sie für zutreffend? Geben Sie weiter eine Einschätzung zur Stabilität des Verfahrens im Hinblick auf die Startpunktwahl ab.

Abgabe am Donnerstag, 19.07.12 vor der Vorlesung.