UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

3. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **1 + 3 = 4 Punkte**

a) Zeigen oder widerlegen Sie:

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so nimmt f ihr Minimum in einem Extremalpunkt von M an.

b) Bestimmen Sie alle Ecken des Polyeders

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2\}.$$

Bringen Sie P anschließend in Normalform $\overline{P}$ und bestimmen Sie alle Ecken von $\overline{P}$.

Aufgabe 2 **1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte**

Gegeben sei das lineare Programm in Normalform

$$\min\ c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b,\ x \ge 0 \tag{1}$$

mit $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $b \ge 0$. Um eine Lösung von (1) zu finden, betrachten wir das von einer Zahl $M \ge 0$ abhängige Hilfsproblem

$$\min\ c^T x + M e^T y \quad \text{u.d.N.} \quad Ax + y = b,\ x, y \ge 0, \tag{2}$$

wobei $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$ ist. Zeigen Sie:

a) Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b \ge 0$ vorausgesetzt werden.

b) Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ ist eine zulässige Basislösung für (2).

c) Ist $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ eine optimale Basislösung für (2) mit $y^* = 0$, so ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Optimierungsproblems (1).

d) Ist (2) lösbar, so ist die Zielfunktion des linearen Problems (1) nach unten beschränkt.

Aufgabe 3 **1 + 3 + 2 = 6 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LP):

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 3x_1 + 2x_2 & & \\
\text{u.d.N.} & 2x_1 + x_2 & \geq & 10 \\
& -3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\
& x_1 + x_2 & \geq & 6 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0\,.
\end{array}
$$

a) Bringen Sie das Optimierungsproblem (LP) in Normalform.

b) 1. Finden Sie eine zulässige Basislösung von (LP) durch Anwendung des in der Vorlesung angegebenen Verfahrens.
   Beachten Sie hierbei, dass es für das gegebene Optimierungsproblem genügt, nur für die erste und dritte Nebenbedingung zusätzliche Variablen $y_1 \geq 0$ bzw. $y_2 \geq 0$ im Hilfsproblem einzuführen.

   2. Lösen Sie nun das ursprüngliche Optimierungsproblem.

c) Wenden Sie das Verfahren aus Ausgabe 2 mit $M = 100$ an, um das lineare Programm (LP) in einem Schritt zu lösen.

Abgabe am Mittwoch, 16.05.12 in der Übung oder am Lehrstuhl.