UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

4. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **2 + 2 =4 Punkte**

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge und $y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Zu y existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $x_y \in C$ mit

$$\|y - x_y\| \leq \|y - x\| \quad \text{für alle } x \in C.$$

Der Vektor x_y heißt Projektion von y auf C und wird auch mit $\mathrm{Proj}_C(y)$ bezeichnet.

b) Ein Vektor z ist genau dann gleich der Projektion von y auf C, wenn

$$(z - y)^T(x - z) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in C.$$

Hinweis: Zum Nachweis der Eindeutigkeit in a) können Sie für zwei minimierende Vektoren $z_1, z_2 \in C$ den Punkt $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ betrachten und ohne Beweis die Identität

$$\|y - z\|^2 = \tfrac{1}{2}\|y - z_1\|^2 + \tfrac{1}{2}\|y - z_2\|^2 - \tfrac{1}{4}\|z_1 - z_2\|^2$$

benutzen. Für die Hinrichtung in Teil b) sollten Sie sich überlegen, dass für $\lambda \in (0, 1)$, $x \in C$ beliebig und $z = \mathrm{Proj}_C(x)$ die Ungleichung

$$\|y - z\| \leq \|y - (z + \lambda(x - z))\|$$

gilt, und daraus

$$0 \leq 2(z - y)^T(x - z) + \lambda\|x - z\|^2$$

folgern.

Aufgabe 2 **2 + 2 = 4 Punkte**

Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ zwei nichtleere, konvexe Mengen mit $X \cap Y = \emptyset$. Zeigen Sie:

a) Es existiert ein Vektor $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$a^T x \leq a^T y \quad \text{für alle } x \in X,\ y \in Y.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $Y - X = \{y - x \mid x \in X,\ y \in Y\}$.

b) Ist zusätzlich X abgeschlossen und Y kompakt, so existieren $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$a^T x < \gamma < a^T y \quad \text{für alle } x \in X,\ y \in Y.$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das System

$$Ax \leq 0 \quad \text{mit} \quad c^T x > 0$$

genau dann lösbar ist, wenn das System

$$w^T A = c^T \quad \text{mit} \quad w \geq 0$$

keine Lösung besitzt.

Hinweis: Die Menge $K = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = A^T w, w \geq 0\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Eine Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ soll durch ein Polynom $p_\alpha(t) := \sum_{i=1}^n \alpha_i t^{i-1}$ approximiert werden. Dazu fordert man, dass an vorgegebenen äquidistanten Punkten

$$t_j := a + \frac{j(b-a)}{m}, \quad j = 0, \ldots, m$$

der Ausdruck

$$\Delta(\alpha) := \max_{j=1,\ldots,m} |f(t_j) - p_\alpha(t_j)|$$

minimal wird. Formulieren Sie diese *Tschebyscheff-Approximationsaufgabe* als lineares Programm in der Form

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{u.d.N.} & Ax \leq b \end{array}$$

mit expliziter Angabe von A, b, c.

Abgabe am Donnerstag, 24.05.12 vor der Vorlesung.