UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

5. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **2 + 2 = 4 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{llcl} \max & 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 & & \\ \text{u.d.N.} & x_1 + + 2x_3 + x_4 & \leq & 2 \\ & 3x_1 + x_2 + + 2x_4 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Formulieren Sie das duale Problem (P') zu (P) und lösen Sie dieses graphisch.

b) Bestimmen Sie auf möglichst einfache Weise eine Lösung des primalen Problems (P).

Aufgabe 2 **2 + 2 = 4 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm in Normalform

$$\min \; c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b, \; x \geq 0 \tag{1}$$

mit $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $b \geq 0$. Um eine Lösung von (1) zu finden, betrachten wir erneut das von einer Zahl $M \geq 0$ abhängige Hilfsproblem

$$\min \; c^T x + M e^T y \quad \text{u.d.N.} \quad Ax + y = b, \; x, y \geq 0, \tag{2}$$

wobei $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$ ist. Zeigen Sie:

a) Ist (1) lösbar, dann existiert eine Zahl M^*, so dass für alle $M > M^*$ das Problem (2) lösbar ist.

b) Für jede Lösung $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ von (2) gilt: $y^* = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie die dualen Probleme zu (1) und (2).

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \\ \text{u.d.N.} & x_1 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 2, \quad \ldots, \quad x_1 + \cdots + x_n \geq n, \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}$$

Stellen Sie das duale Problem (P') auf und verwenden Sie die optimale Lösung y^* von (P'), um die optimale Lösung x^* von (P) zu bestimmen.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Implementieren Sie die Tschebyscheff-Approximation aus Blatt 4, Aufgabe 4. Betrachten Sie dazu die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x \sin(6\pi x)$$

und geben Sie die Werte von f an den Stellen

$$t_j = j/(m-1), \quad j = 0, \ldots, m-1$$

mit $m = 50$ vor. Stören Sie die Funktionswerte $f(t_j)$ mit einer auf $[-0.2, 0.2]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Setzen Sie den Grad n des Approximationspolynoms

$$p_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^i$$

auf $n = 5$ sowie $n = 15$ und plotten Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Sie dürfen eine vorgefertigte Routine zur Lösung linearer Programme verwenden. In Matlab liefert die Eingabe *linprog(c,A,b)* eine Lösung des linearen Programms

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{u.d.N.} & Ax \leq b. \end{array}$$

Wählen Sie die Optionen der Routine so aus, dass der Simplex-Algorithmus zur Lösung des Optimierungsproblems verwendet wird.

Abgabe am Donnerstag, 31.05.12 vor der Vorlesung.