UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

6. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie die folgende Aussage:
Für u, $v \in \mathbb{R}^m$ ist die Matrix $B + uv^T$ genau dann regulär, wenn $1 + v^t B^{-1} u \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt

$$(B + uv^{\mathrm{T}})^{-1} = \left(I_m - \frac{B^{-1} uv^{\mathrm{T}}}{1 + v^{\mathrm{T}} B^{-1} u} \right) B^{-1},$$

wobei $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Sind die folgenden Funktionen konvex, streng konvex oder nichts von beidem? Begründen Sie ihre Antwort.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

b) p-Norm für $1 < p < \infty$: $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$

c) 1-Norm

Aufgabe 3 **2 + 2 + 1 = 5 Punkte**

Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn ihr Epigraph eine konvexe Menge ist.

b) Ist $f : B \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, dann gilt für alle $\lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ x_i \in B$, $i = 1, \ldots, n$ die Ungleichung:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

c) Für alle $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $x_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Logarithmusfunktion.

Aufgabe 4 **2 + 2 = 4 Punkte**

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen sie:

a) Für alle u, v, $w \in I$ mit $u < v < w$ gilt die Ungleichungskette:

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}.$$

Veranschaulichen Sie diese Aussage anhand einer Grafik.

b) Auf jedem kompakten Teilintervall $J = [a, b] \subset I$ ist die Funktion f Lipschitz-stetig.

Abgabe am Mittwoch, 6.6.12 in der Übung oder am Lehrstuhl bis 14 Uhr.