UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

7. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **3 Punkte**

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rll} \min & (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 & \\ \text{u. d. N.} & x_1+x_2 & \geq 0 \\ & x_1^2+x_2^2 & \leq 2 \\ & -x_1^2-x_2^2 & \leq -\frac{1}{4} \\ & x_1^2-x_2 & \leq 1, \end{array}$$

graphisch, indem Sie den zulässigen Bereich und die Niveaulinien $N_f(\alpha) = \{x \mid f(x) = \alpha\}$ der Zielfunktion skizzieren.

Aufgabe 2 **1 + 2 + 2 = 5 Punkte**

Seien $\gamma \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + c^{\mathrm{T}}x + \gamma.$$

a) Wieso kann bei einem quadratischen Optimierungsproblem o.B.d.A. Q symmetrisch vorausgesetzt werden?

b) Zeigen Sie: f ist genau dann konvex (strikt konvex), wenn Q positiv semidefinit (positiv definit) ist.

c) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für das Optimierungsproblem (Q)

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{u. d. N.} & h(x) := b^{\mathrm{T}}x = 0 \end{array}$$

und reduzieren Sie diese so weit wie möglich.

Aufgabe 3 **1 + 2 + 1 = 4 Punkte**

Es gelten die Bezeichnungen aus der vorigen Aufgabe, wobei die Matrix Q als positiv definit vorausgesetzt sei.
Zur Lösung von (Q) kann ein sogenanntes *Penalty-Verfahren* verwendet werden. Das restringierte Problem wird dabei in ein Problem ohne Nebenbedingungen umgewandelt, indem zur Zielfunktion ein Term addiert wird, der das Verlassen des zulässigen Bereichs bestraft.
In dieser Aufgabe wird für einen festen Parameter $\alpha > 0$ das Penalty-Verfahren $(\mathrm{P})_\alpha$

$$\min \; P_\alpha(x) := f(x) + \frac{\alpha}{2} h(x)^2$$

betrachtet.

a) Beweisen Sie, dass $(\mathrm{P})_\alpha$ für hinreichend große α eine eindeutige Lösung x_α besitzt, und geben Sie diese an.

   Hinweis: Verwenden Sie die *Sherman-Morrison-Formel* (Blatt 6, Aufgabe 1)

b) Zeigen Sie, dass
$$x^* := \lim_{\alpha \to \infty} x_\alpha$$
   das ursprüngliche Problem (Q) löst.

c) Geben Sie einen Algorithmus zur Implementierung des *Penalty-Verfahrens* an.

Aufgabe 4 Aufgabe: **1 + 1 + 2 = 4 Punkte**

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Der zu K *duale Kegel* ist definiert als

$$K^* = \{\, y \in \mathbb{R}^n \,|\, x^{\mathrm{T}} y \geq 0 \text{ für alle } x \in K \,\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) K^* ist ein Kegel.

b) Ist K ein Unterraum, so gilt: $K^* = K^\perp = \{\, y \in \mathbb{R}^n \,|\, x^{\mathrm{T}} y = 0 \text{ für alle } x \in K \,\}$.

c) Ist $K := \{\, (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\| \leq t \,\}$, so gilt: $K^* = \{\, (u,v) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|u\|_* \leq v \,\}$, wobei die auftretende Norm definiert ist durch $\|u\|_* = \sup\{\, u^{\mathrm{T}} x \,|\, \|x\| \leq 1 \,\}$.

Abgabe am Donnerstag, 14.06.12 vor der Vorlesung.