UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

8. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **1 + 4 = 5 Punkte**

a) Für Vektoren $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ sei $\operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_m\} \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\, i = 1, \dots, m \right\}$ der von $a_1, \dots, a_m$ erzeugte (konvexe) Kegel.
Skizzieren sie $K \coloneqq \operatorname{cone}\left\{(-1,0)^T, (-1,1)^T\right\} \cup \operatorname{cone}\left\{(1,0)^T, (2,1)^T\right\}$. Ist K ein Kegel? Ist K konvex?

b) Bestimmen Sie zu folgenden Mengen den Tagentialkegel im Nullpunkt. Fertigen Sie dazu zunächst eine Skizze der Kegel an.

   a) $M_1 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$
   b) $M_2 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$
   c) $M_3 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$
   d) $M_4 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\}$

Aufgabe 2 **2 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und M eine nichtleere Menge. Weiter sei $x^* \in M$ ein lokales Minimum der Optimierungsaufgabe $\min_{x \in M} f(x)$. Zeigen Sie:

$$\nabla f(x^*)^T s \geq 0 \text{ für alle } s \in T(M, x^*).$$

Aufgabe 3 **2 + 2 + 2 = 6 Punkte**

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $M = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, g(x) \leq 0 \,\}$ der zulässige Bereich der Minimierungsaufgabe $\min_{x \in M} f(x)$. Der *linearisierte Tangentialkegel* an M im Punkt $\bar{x}$ ist definiert als

$$\mathcal{T}_{\text{lin}}(M, \bar{x}) = \{\, d \in \mathbb{R}^n \,|\, \nabla g_i(\bar{x})^{\mathrm{T}} d \leq 0,\; \text{falls } g_i(\bar{x}) = 0 \,\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{T}(M, \bar{x}) \subseteq \mathcal{T}_{\text{lin}}(M, \bar{x})$

b) Genügt ein lokales Minimum x^* von f in M der sog. *Abadie Constraint Qualification*

$$\mathcal{T}(M, x^*) = \mathcal{T}_{\text{lin}}(M, x^*),$$

so gibt es Lagrange-Multiplikatoren $y^* \in \mathbb{R}^m,\ y^* \geq 0$, so dass die KKT-Bedingungen

$$\begin{aligned} L_x(x^*, y^*) &= 0 \\ L_y(x^*, y^*) = g(x^*) &\leq 0 \\ (y^*)^{\mathrm{T}} L_y(x^*, y^*) = (y^*)^{\mathrm{T}} g(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 und die auf Blatt 4, Aufgabe 3 bewiesene Variante des Lemma von Farkas.

c) Für lineare Nebenbedingungen $g(x) = Ax - b$ gilt stets $\mathcal{T}(M, x) = \mathcal{T}_{\text{lin}}(M, x)$.

Aufgabe 4 **3 Punkte**

Bestimmen Sie zu dem Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 \\ \text{u.d.N.} & x_1^3 + x_2 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

den Tangentialkegel und den linearisierten Tangentialkegel des zulässigen Bereichs im Nullpunkt.

Abgabe am Donnerstag, 21.06.12 vor der Vorlesung.