UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. M. Riplinger

9. Übungsblatt zu 'Optimierung'

Aufgabe 1 **2 + 1 + 1 = 4 Punkte**

Betrachtet wird das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min & -\frac{1}{2}x_1^2 + x_2 + \frac{1}{2}x_3^2 & & \\ \text{u.d.N.} & x_1 + x_2^2 + x_3 & \geq & 0 \\ & x_1 + x_2^4 - x_3 & \geq & 0 \\ & x_1 & \geq & 0\,. \end{array}$$

a) Weisen Sie nach, dass die Abadie Constraint Qualification im Punkt $x^* = (0,0,0)^T$ gilt.

b) Ist die hinreichende Bedingung 2. Ordnung für eine strikte lokale Minimumstelle aus Satz 2.8.5 erfüllt?

c) Rechnen Sie nach, ob x^* tatsächlich eine lokale Minimumstelle ist.

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Es sei $M = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ der Graph einer C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Zeigen Sie, dass für $z := (x, f(x))$ der Tangentialkegel die Darstellung

$$\mathcal{T}(M, z) = \{(u, J_f(x)u) \mid u \in \mathbb{R}^n\}$$

hat. Dabei bezeichnet $J_f(x)$ die Jacobi-Matrix von f in x.

Aufgabe 3 **1 + 2 = 3 Punkte**

Gegeben ist das quadratische Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \tfrac{1}{2}\, x^T C x + p^T x$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $p \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass die eindeutige Lösung dieses unrestringierten Problems $x^* = -C^{-1}p$ ist.

b) Betrachtet wird nun das restringierte Problem

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\, x^T C x + p^T x \\ \text{u.d.N.} & Bx = b \end{array}$$

mit einer Nebenbedingungsmatrix $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Leiten Sie her, wie die KKT-Punkte mittels eines Gleichungssystems berechnet werden können. Was folgt daraus?

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Implementieren Sie das Verfahren der Fibonacci-Suche, so wie es in der Vorlesung vorgestellt wurde. Lassen Sie dabei in jedem Schritt zusätzlich das Intervall ausgeben, indem die gesuchte Minimalstelle liegen muss.
Testen Sie ihren Algorithmus anhand der auf $[0, 1]$ unimodalen Funktion $g(x) = \cos(5x)$. Der Wert n ist hierbei so zu wählen, dass das Programm ein Intervall berechnet, welches die gesuchte Lösung enthält und maximal die Länge 0.01 besitzt.

Abgabe am Donnerstag, 28.06.12 vor der Vorlesung.