



10. Übungsblatt zu 'Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang } A = n$. Zeigen Sie

1. $C = A^*A$ ist positiv definit.
2. Für die verallgemeinerte Inverse $A^\dagger$ gilt die Darstellung $A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*$.

Aufgabe 2

Für $\mu \in \mathbb{Z}$, definieren wir den periodischen Sobolevraum H^μ durch

$$H^\mu := \{f \in L_2(0, 2\pi), \|f\|_{H^\mu} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{2\mu} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

wobei die Fourier Koeffizienten durch

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

gegeben sind.

Zeigen Sie

1. Ist $f \in C^1[0, 2\pi]$ und $f' \in L_2(0, 2\pi)$, dann $f \in H^1$.
2. $H^{\mu+1} \subset H^\mu$ für $\mu \in \mathbb{Z}$.
3. Ist $f \in H^{\max(\mu, \nu)}$ und $\theta \in [0, 1]$, dann gilt

$$\|f\|_{H^{\mu\theta + (1-\theta)\nu}} \leq \|f\|_{H^\mu}^\theta \|f\|_{H^\nu}^{1-\theta}.$$

Aufgabe 3

Für die 2π -periodische Funktion $k \in L_2(0, 2\pi)$ definieren wir den Faltungsoperator $T_k \in \mathcal{L}(L_2(0, 2\pi))$ durch

$$T_k \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\tau) k(t - \tau) d\tau, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Hier ist $\tilde{f}$ die Einschränkung einer 2π -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[0, 2\pi]$.

Eine 'Black Box' macht aus einem Eingangssignal f ein Ausgangssignal g . Dafür gelte eine Integralgleichung

$$T_k f = g$$

als Modell.

Eine Eingangswelle $f_n : t \rightarrow e^{int}$ der Frequenz $n \in \mathbb{Z}$ wird mit dem Faktor $\lambda_n = (2\sqrt{2\pi}|n|)^{-1}$ durch die 'Black Box' gedämpft, d.h. $g_n = \lambda_n f_n, g_n := T_k f_n$.

1. Bestimmen Sie den zugehörigen Kern k .

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis

$$-\ln\left(2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k} \quad \text{mit Konvergenz in } L_2(0, 2\pi).$$

2. Bestimmen Sie $\nu \in \mathbb{Z}$, so dass der Operator $T_k : H^\mu \rightarrow H^{\mu+\nu}$, $\mu \in \mathbb{Z}$, stetig invertierbar ist. Die Sobolevräume $H^\mu, \mu \in \mathbb{Z}$, sind wie in Aufgabe 2 definiert.

Abgabetermin: Donnerstag, den 25.07.2013 vor der Vorlesung.