UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

3. Übungsblatt zu ' Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Es seien $X = \mathcal{C}([0,1])$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ und der Integraloperator

$$A : X \to X,\ Af(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Zeigen Sie, dass A injektiv und beschränkt ist, aber kein dichtes Bild in X hat.
2. Zeigen Sie: Der inverse Operator $(\lambda I - A)^{-1}$ von $(\lambda I - A)$ ist auf dem Unterraum der stetig differenzierbaren Funktionen $\mathcal{C}^1([0,1])$ für $\lambda \neq 0$ wohl definiert und bestimmen Sie den Kern k_λ, so dass

   $$(\lambda I - A)^{-1} g(t) = \int_0^1 k_\lambda(t,x) g(x) dx, \quad g \in \mathcal{C}^1([0,1])$$

   gilt.
3. Zeigen Sie: $(\lambda I - A)^{-1}$ existiert in $\mathcal{L}(X)$ genau dann, wenn $\lambda \neq 0$.

Aufgabe 2

Es seien $\ell^\infty([0,1])$ der Raum aller beschränkten Funktionen auf $[0,1]$ mit der Supremumnorm versehen und der Operator

$$T : X \to X,\ Tx(t) = tx(t)$$

mit $X := \{x \in \ell^\infty([0,1]),\, x \text{ stetig bei } 0 \text{ und } 1\,, x(0) = 0\}$.
Zeigen Sie:

1. Der Operator $\lambda I - T$ ist genau dann nicht injektiv, wenn $\lambda \in (0,1)$.
2. Der Operator $\lambda I - T$ ist genau dann injektiv, nicht surjektiv mit dichtem Bild, wenn $\lambda = 0$.
3. Der Operator $\lambda I - T$ ist genau dann injektiv, nicht surjektiv ohne dichtes Bild, wenn $\lambda = 1$.
4. Der inverse Operator $(\lambda I - T)^{-1}$ existiert in $\mathcal{L}(X)$ genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$.

Aufgabe 3

Seien H ein Hilbertraum, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Setze

$$Tf := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < f, e_n > e_n, \quad f \in H.$$

Zeigen Sie:

1. $T \in \mathcal{L}(H)$, und T ist normal d.h. $TT^* = T^*T$.
2. T ist kompakt genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.
3. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T.

Aufgabe 4

Es sei der Integraloperator

$$Af(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$$

1. Zeigen Sie $A \in \mathcal{L}(L_2(0,1))$ und bestimmen Sie den adjungierten Operator A^*.
2. Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_n = \sigma_n^2$ und die normierten Eigenvektoren v_n bzw. $u_n, n \in \mathbb{N}$, von A^*A bzw. AA^*.
3. Zeigen Sie:
$$Af = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n < f, v_n > u_n, \quad f \in L_2(0,1).$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 23.05.2013 vor der Vorlesung.

Bemerkung: Die Übungen finden freitags, von 10 Uhr 30 bis 12 Uhr im Seminarraum 7 (203), Gebäude: E2.4, Statt.