UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

4. Übungsblatt zu ' Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Es sei der Integraloperator

$$Af(x) = \int_0^\pi \cos(x+t)\, f(t)\, dt.$$

Berechnen Sie den $m-$ten iterierten Kern $K_m, m \in \mathbb{N},$ des Operators A.

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N}$ sei der Integraloperator

$$Af(x) = \int_{-\pi}^\pi \cos^n(x-t)\, f(t)\, dt.$$

1. Berechnen Sie die Eingenwerte $\{\lambda_r\}_{r=0,..n}$ und die normierten Eigenfunktionen von A.
2. Zeigen Sie
$$\sum_{r=0}^n \frac{1}{\lambda_r} = \pi.$$
3. Lösen Sie die Integralgleichung
$$f = g - \lambda A f$$
für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $g \in L_2(-\pi,\pi)$.

Aufgabe 3

Es seien $g \in \mathcal{C}(0,\pi)$ und die Folge $\{f_n\}_n$

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^\pi \cos(x+t)\, f_n(t)\, dt,\ x \in [0,\pi], \quad n \geq 0$$

mit $f_0 \in \mathcal{C}(0,\pi)$ gegeben. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge $\{f_n\}_n$ in $L_2(0,\pi)$.

Aufgabe 4

Es seien $f_0(x) = ax$ mit a konstant und $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ mit

$$f_{n+1}(x) = ax + \int\limits_0^1 x\,t\,f_n(t)\,dt,\ \ x \in [0,\pi], \quad n \geq 0.$$

Abgabetermin: Dienstag, den 04.06.2013 vor der Vorlesung.

Bemerkung: Die Übungen finden freitags, von 10 Uhr 30 bis 12 Uhr im Seminarraum 7 (203), Gebäude: E2.4, Statt.