UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

5. Übungsblatt zu ' Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Es sei die Integralgleichung

$$f(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 (x+1)e^{-xy} f(y)dy = e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-(x+1)}, \quad x \in [0,1].$$

1. Ersetzen Sie e^{-xy} durch eine Partialsumme der Exponentialreihe und formulieren Sie ein lineares Gleichungssystem zur Lösung der approximierenden Gleichung.
2. Zeigen Sie, dass $f(x) = e^{-x}, x \in [0,1]$ die eindeutige Lösung der Integralgleichung ist.

Aufgabe 2

Für die 2π-periodischen Funktion $k \in L_2(0,2\pi)$ definieren wir den Operator $T_k \in \mathcal{L}(L_2(0,2\pi))$ durch

$$T_k\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\tau)k(t-\tau)d\tau,\; t \in (0,2\pi).$$

Hier ist $\tilde{f}$ die Einschränkung einer 2π-periodische Funktion $f : I\!R \longrightarrow \mathbb{C}$ auf $[0,2\pi]$.
Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T_k.

Aufgabe 3

Es sei $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ ein kompakter Operator auf den Hilberträumen X und Y.
Zeigen Sie für $\gamma > 0$:

$$||A(A^*A + \gamma I)^{-1})|| = ||(AA^* + \gamma I)^{-1}A|| \leq \gamma^{-\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 4

Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein linearer, beschränkter *surjektiver* Operator zwischen den Hilberträumen X und Y. Zeigen Sie, dass der Wertebereich $T^*(Y)$ abgeschlossen ist und der Operator TT^* bijektiv ist.
Hinweis: Es gilt (ohne Beweis): $T^{-1} : Y \longrightarrow \overline{T^*(Y)}$ ist beschränkt.

Abgabetermin: Donnerstag, den 13.06.2013 vor der Vorlesung.