**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**Fakultät 6.1 Mathematik**

Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

6. Übungsblatt zu ' Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Es sei $X = \mathcal{C}(D)$, $X_n \subset X$ mit $\dim X_n = n < \infty$ und $\Pi_n : X \to X_n$ ein Interpolationsoperator, d. h. $\Pi_n(\varphi) = \varphi_n \in X_n$, wobei

$$\varphi(\xi_{i,n}) = \varphi_n(\xi_{i,n}) \quad (*)$$

für $n$ vorgegeben Stützstellen $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, .., \xi_{n,n}$ in $D$.

1. Es sei $X_n = Vekt\{\psi_{1,n}, \psi_{2,n}, .., \psi_{n,n}\}$. Zeigen Sie : Die Interpolation $(*)$ existiert und ist eindeutig, wenn die Matrix
$$M_n = (\psi_{i,n}(\xi_{j,n}))_{i,j=1,..,n}$$
regulär ist.

2. Seien $\varphi_n, \tilde{\varphi}_n \in X_n$. Zeigen Sie: Es is $\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$ genau dann, wenn $\varphi_n(\xi_{i,n}) = \tilde{\varphi}_n(\xi_{i,n})$ für $i = 1, 2, .., n$ gilt.
Der Operator $\Pi_n$ ist offenbar eine Projektion. Die Diskretisierung einer Integralgleichung $(\lambda I - K)f = g$ in der Form $\lambda f_n = g_n + K_n f$ mit $K = (\Pi_n \otimes \Pi_n)K$ und $g_n = \Pi_n g$ heißt *Kollokationsmethode.*

Aufgabe 2

Wir behalten die Bezeichnungen der Aufgabe 1.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\lambda f_n = g_n + K_n f$ äquivalent zu
$$\lambda f_n(\xi_{j,n}) = g_n(\xi_{j,n}) + K_n f(\xi_{j,n})$$
für $j = 1, .., n$ ist

2. Sei $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_{k,n}$. Bestimmen Sie die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sowie $b \in \mathbb{R}^n$ mit
$$(\lambda A - B)\alpha = b.$$

Aufgabe 3

Lösen Sie die Integralgleichung

$$f(x) = \int_0^1 (x-1)f(t)dt + 1$$

mit Hilfe der Kollokationsmethode

Aufgabe 4

Es sei $A \in \mathcal{L}(X, X)$ mit $||A|| < 1$. Zeigen Sie, dass die Iteration

$$\varphi_{n+1} := A\varphi_n + g, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

für beliebges $\varphi_0 \in X$ gegen die eindeutige Lösung $\varphi$ von $(I - A)\varphi = g$ konvergiert.

Abgabetermin: Donnerstag, den 20.06.2013 vor der Vorlesung.