



7. Übungsblatt zu 'Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Sei $K \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(D), \mathcal{C}(D))$ ein kompakter Integraloperator mit Kern k ,

$$K_n f(x) = \sum_{j=0}^n \omega_j k\left(x, t_j^{(n)}\right) f\left(t_j^{(n)}\right)$$

der Nyström-Operator und $\lambda I - B_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix, die durch Anwendung des Nyström-Verfahrens auf $\lambda I - K$ entsteht, d.h.

$$(B_n)_{lj} = \omega_j k\left(t_l^{(n)}, t_j^{(n)}\right)$$

Zeigen Sie

1. $\|\lambda I - B_n\|_\infty \leq \|\lambda I - K_n\|_{\mathcal{C}(D) \rightarrow \mathcal{C}(D)}$
2. $\lambda I - B_n$ ist genau dann regulär, wenn $\lambda I - K_n$ invertierbar ist
3. $\|(\lambda I - B_n)^{-1}\|_\infty \leq \|(\lambda I - K_n)^{-1}\|_{\mathcal{C}(D) \rightarrow \mathcal{C}(D)}$

Aufgabe 2

Es sei die Integralgleichung

$$f = Kf + g \quad \text{mit} \quad Kf(x) := \frac{1}{2} \int_0^1 xt f(t) dt, \quad g(x) = \frac{5}{6}x.$$

Mit dem Nyström-Verfahren bestimmen Sie eine Lösung $\tilde{f}$ dieser Integralgleichung, wobei Sie

$$\int_0^1 \phi(t) dt \approx \frac{1}{6} \left\{ \phi(0) + 4\phi\left(\frac{1}{2}\right) + \phi(1) \right\}$$

als Quadratur verwenden.

Berechnen Sie $(I - K)\tilde{f} - g$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 3

Sei $\lambda f_n = g_n + K_n f_n$ ein Verfahren zur Lösung von $(\lambda I + K)f = g$. Die iterierte Defektkorrektur ist definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} f_n^0 &= (\lambda I - K_n)^{-1} g_n \\ f_n^{j+1} &= f_n^j - (\lambda I - K_n)^{-1} ((\lambda I - K)f_n^j - g) \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Ist f die Lösung von $(\lambda I + K)f = g$, so gilt die Fehldarstellung:

$$f_n^j - f = ((\lambda I - K_n)^{-1}(K - K_n))^j (f_n^0 - f) \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \dots$$

Aufgabe 4

Es Sei der Operator

$$A\varphi(x) := \int_0^x \int_0^y \varphi(t) dt dy.$$

Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$\varphi(x) = 1 + A\varphi(x)$$

eine eindeutige Lösung $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1])$ besitzt. Berechnen Sie diese mit Hilfe der Fixpunkt-Iteration

$$\varphi_{n+1} := A\varphi_n + g, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 27.06.2013 vor der Vorlesung.