UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

8. Übungsblatt zu ' Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Gegeben sei die Volterrasche Integralgleichung 2. Art

$$f(t) - \int_a^t k(t,\tau) f(\tau) d\tau = g(t). \quad (*)$$

1. Formulieren Sie mit Hilfe der Quadraturformel

$$\int_a^b \phi(t) dt \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i \phi(t_i)$$

   ein Quadraturverfahren zur nährungsweisen Lösung von ($*$) zu den Knotenpunkten $a = t_1, t_2, ..., t_n$.

2. Beweisen Sie, dass folgendes Rekursionsschema gilt, falls $1 - \omega_j k_{jj} \neq 0$ ist für $j = 2, .., n$:

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1 \\ f_j &= \left(g_j + \sum_{i=1}^{j-1} \omega_i k_{ji} f_i \right) (1 - \omega_j k_{jj})^{-1} \\ &\quad \text{für}\, j = 2, ..., n, \end{aligned}$$

   wobei $g_j := g(t_j), k_{ji} := k(t_j, t_i)$ und $f_j \approx f(t_j)$ die zu errechnende Näherungslösung in $t_1, t_2, ..., t_n$ sein soll.

Aufgabe 2

Es sei $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ eine Menge kollektiv kompakter Operatoren, X und Y seien Banachräume. Beweisen Sie:

1. Es sei Z ein endlichdimensionaler Banachraum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(Y, Z)$ eine Menge gleichmäßig beschränkter Operatoren. Dann ist die Menge

$$\mathcal{C} := \{BA : B \in \mathcal{B}, A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{L}(X, Z)$$

   kollektiv kompakt.

2. Sei $(L_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Z)$ eine punktweise konvergente Folge von Operatoren mit Grenzwert $L : Y \to Z$. Dann gilt

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} ||(L_n - L)A|| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen $A^\dagger : \mathcal{D}(A^\dagger) \to X$.

1. $\mathcal{D}(A^\dagger) = Y \quad \Leftrightarrow \quad R(A) = \overline{R(A)}$
2. $R(A^\dagger) = N(A)^\perp$
3. Falls $R(A) = \overline{R(A)}$ und $A^{-1}_{|R(A)}$ existiert, dann $A^\dagger_{|R(A)} = A^{-1}_{|R(A)}$.
4. $A^\dagger$ ist linear.
5. $A^\dagger$ ist stetig $\Leftrightarrow$ $R(A) = \overline{R(A)}$

Aufgabe 4

1. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch
$$F(\lambda) = ||A(f + \lambda\phi - g)||^2$$
wobei $A \in \mathcal{L}(X, Y), f, \phi \in X$ und $g \in Y$. Berechnen Sie die Ableitung $F'(\lambda)$.
2. Es sei $F_\gamma : X \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch
$$F_\gamma(f) = ||Af - g)||^2 + \gamma^2||f||^2,$$
wobei $A \in \mathcal{L}(X, Y), f, \phi \in X$ und $g \in Y$. Berechnen Sie
$$DF_\gamma(f) := \lim_{\lambda \to 0} \frac{F_\gamma(f + \lambda\phi) - F(f)}{\lambda}.$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 04.07.2013 vor der Vorlesung.