UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

9. Übungsblatt zu ' Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Es seien der Operator

$$Af(x) := \int_0^x f(t)dt$$

und der zentraler Differenzquotienten

$$D_h g(x) := \frac{g(x+h) - (x-h)}{2h}.$$

1. Für $f \in \mathcal{C}([0,1])$ und $g := Af$ Zeigen Sie

$$\lim_{h \to 0} g - D_h g = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{C}([0,1])$$

2. Es sei g^ε gestörte Daten mit

$$||g^\varepsilon - g||_\infty \leq \varepsilon.$$

   Zeigen Sie

$$||D_h g^\varepsilon - f||_\infty \varphi(h)$$

   wobei $\varphi(h) = c_1 h^2 + c_2 \frac{\varepsilon}{h}$ mit den Konstanten c_1, c_2 zu bestimmen

3. Bestimmen Sie das Optimum h_ε von φ und interpretieren Sie das Ergebnins.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ordnung der Schlechtgestelltheit des Operators $A \in \mathcal{L}_(\prime, \infty)$ definiert durch

$$Af(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Aufgabe 3

Aufgabe 4

1. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$F(\lambda) = ||A(f + \lambda\phi - g)||^2$$

   wobei $A \in \mathcal{L}(X, Y), f, \phi \in X$ und $g \in Y$. Berechnen Sie die Ableitung $F'(\lambda)$.

2. Es sei $F_\gamma : X \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$F_\gamma(f) = ||Af - g)||^2 + \gamma^2 ||f||^2,$$

wobei $A \in \mathcal{L}(X,Y), f, \phi \in X$ und $g \in Y$. Berechnen Sie

$$DF_\gamma(f) := \lim_{\lambda \to 0} \frac{F_\gamma(f + \lambda\phi) - F(f)}{\lambda}.$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 04.07.2013 vor der Vorlesung.