



2. Übungsblatt zu 'Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Es sei die Integralgleichung

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t) \phi(t) dt \quad (\text{I})$$

mit dem Kern $k(x, t) = xt^2 + x^2t^4$ und $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

1. Zeigen Sie, dass eine Lösung der Integralgleichung in der Form

$$\phi(x) = f(x) + \lambda c_1 x + \lambda c_2 x^2$$

sich schreiben läßt, wobei c_1 und c_2 konstant sind.

2. Für $\lambda^2 - 165\lambda + 420 \neq 0$ und $f(x) = x^3$ lösen Sie die Integralgleichung.

Aufgabe 2

Wir betrachten wieder die Integralgleichung (I) aus Aufgabe 1.

1. Es sei

$$R(x, t, \lambda) = \frac{420((1 - \lambda/7)xt^2 + (\lambda/5)xt^4 + (\lambda/6)x^2t^2 + (1 - \lambda/4)x^2t^4)}{\lambda^2 - 165\lambda + 420}$$

mit $\lambda^2 - 165\lambda + 420 \neq 0$.

Zeigen Sie:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 R(x, t, \lambda) f(t) dt$$

ist die eindeutige Lösung der Integralgleichung (I).

2. Falls $\lambda^2 - 165\lambda + 420 = 0$ lösen Sie die Integralgleichung (I) für $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

Aufgabe 3

Es sei die Integralgleichung

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x,t) \phi(t) dt \quad (\Gamma)$$

1. Lösen Sie die Integralgleichung (Γ) mit dem Kern $k(x,t) = a(x)b(t)$, wobei $a, b \in \mathcal{C}([0,1])$ und $f \in \mathcal{C}([0,1])$ stetige Funktionen sind.
2. Lösen Sie die Integralgleichung (Γ) mit dem Kern $k(x,t) = a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t)$, wobei $a_i, b_i \in \mathcal{C}([0,1])$, $i = 1, 2$ und $f(x) = 0$ für $x \in [0,1]$.
3. Falls $\lambda^2 - 165\lambda + 420 \neq 0$ lösen Sie die Integralgleichung (Γ) mit dem Kern $k(x,t) = x^2t + x^4t^2$, $x, t \in [0,1]^2$ und $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Aufgabe 4

Es sei die Integralgleichung

$$\phi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 k(x,t) \phi(t) dt$$

mit dem Kern $k(x,t) = x - t$

1. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\sqrt{3}\}$ zeigen Sie, dass die Integralgleichung eine eindeutige Lösung besitzt.
2. Für $\lambda = \pm 2i\sqrt{3}$ zeigen Sie, dass die Integralgleichung keine Lösung hat.

Abgabetermin: Donnerstag, den 09.05.2013 vor der Vorlesung.

Bemerkung: Die Übungen finden freitags, von 10 Uhr 30 bis 12 Uhr im Seminarraum 7 (203), Gebäude: E2.4, Statt.