UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

1. Übungsblatt zu ' Theorie und Numerik von Integralgleichungen' im SS 2013

Aufgabe 1

Es sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$e_n(t) := \exp\left(i\, n\, \frac{2\pi}{T} t\right), n \in \mathbb{Z},\, i^2 = -1,$$

auf dem Intervall $]-T/2, T/2]$ ein orthogonales System in $L^2(-T/2, T/2)$ bilden und berechne $||e_n||$.
Folgere daraus, dass das System

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

orthonormal in $L^2(-\pi, \pi)$ ist.

Aufgabe 2

Es sei $A \in \mathcal{L}(L^2(-\pi, \pi))$ der Integraloperator

$$Ax(s) := \int_{-\pi}^{\pi} \sin(s+t)\, x(t) dt$$

1. Zeigen Sie, dass der Operator A entartet ist.
2. Lösen Sie die Integralgleichung

$$x(s) = s + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(s+t)\, x(t) dt, \quad x \in L^2(-\pi, \pi)$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Eine Funktion $x \in C^2([0, 1])$ erfüllt genau dann das Randwertproblem

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = x(1) = 0,$$

wenn Sie eine Lösung der homogenen Fredholmschen Integralgleichung

$$x(s) = \lambda \int_0^1 k(s, t)\, x(t) dt$$

mit dem Kern

$$k(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & , \quad 0 \le s \le t \le 1 \\ (1-s)t & , \quad 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4

Lösen Sie die Integralgleichung

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^{\pi} k(t,\tau)\, x(\tau) dt$$

mit $k(t,\tau) = t\,\tau$ und $f(t) = \sin t$ für $t,\tau \in [0,\pi]$.

Abgabetermin: Donnerstag, den 02.05.2013 vor der Vorlesung.

Bemerkung: Die Übungen finden freitags, von 10 Uhr 30 bis 12 Uhr im Seminarraum 7 (203), Gebäude: E2.4, Statt.