FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

1. Übung zu 'Inverse Probleme mit Anwendungen in der Bildrekonstruktion'
Sommersemester 2015

1. Aufgabe Fouriertransformation **1.5 + 1.5 + 3 = 6 Punkte**

a) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [-\gamma, \gamma] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \gamma > 0.$$

b) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f_\lambda(x) := f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ mit $\lambda \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\widehat{f_\lambda}(\xi) = |\lambda|^n \widehat{f}(\lambda\xi)\,.$$

c) Es sei $f_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Zeigen Sie für σ_1, $\sigma_2 > 0$:

$$f_{\sigma_1} * f_{\sigma_2} = f_{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass gilt

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2/2}\right)(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

2. Aufgabe Funktionenräume **2 + 2 = 4 Punkte**

a) Weisen Sie nach, dass weder $L_2(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R})$ noch $L_1(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$ gilt.

b) Es sei I ein beschränktes Intervall, das nicht zu einem Punkt entartet ist. Zeigen Sie, dass dann für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $s < r$ die Inklusion

$$L_r(I) \subset L_s(I)$$

erfüllt ist.

3. Aufgabe Schlecht-Gestelltheit **2 Punkte**

Das Steuerungsproblem einer Rakete besteht darin, die Kontrollfunktion $f(t)$ aus Angabe des Weges $g(t)$ zu bestimmen. Im eindimensionalen Fall lässt sich das Problem durch die Operatorgleichung

$$Af(s) = g(s)$$

mit

$$A : C([0,1]) \to L_2([0,1]),$$
$$Af(s) = \int_0^s (s-t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

beschreiben.

Ist das Problem nach Hadamard gut gestellt?

4. Aufgabe Approximations- und Datenfehler **2.5 + 0.5 + 1 = 4 Punkte**

Betrachten Sie den Operator

$$A : C([0,1]) \to C([0,1]),$$
$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

aus der Vorlesung. Die exakte Lösung der Gleichung $Af = g$, falls existent, lautet $f = g'$.

Zur numerischen Lösung der Gleichung $Af(x) = g(x)$ verwenden wir den zentralen Differenzenquotienten

$$T_h g(x) = \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}, \quad h > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass für den *Approximationsfehler* gilt

$$|f(x) - T_h g(x)| \le \frac{h^2}{6} \|f''\|_\infty,$$

vorausgesetzt g ist glatt genug.

b) Seien g^ϵ gestörte Daten mit $\|g^\epsilon - g\|_\infty \le \epsilon$. Zeigen Sie

$$|T_h(g^\epsilon - g)(x)| \le \frac{\epsilon}{h}.$$

c) Betrachten Sie den Gesamtfehler im Fall gestörter Daten:

$$|f(x) - T_h g^\epsilon(x)| \le |f(x) - T_h g(x)| + |T_h(g^\epsilon - g)(x)|.$$

Ist einer der Fälle

- $h \to 0$
- $h \to \infty$

vorteilhaft in Bezug auf den Gesamtfehler?

Abgabe am Montag 11. Mai vor der Vorlesung.