FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

2. Übung zu 'Inverse Probleme mit Anwendungen in der Bildrekonstruktion' Sommersemester 2015

1. Aufgabe Stetige Operatoren — 2 + 1 = 3 Punkte

Seien S, T beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Betrachten Sie den Integraloperator

$$A : L_2(S) \to L_2(T)$$
$$Af(x) = \int_S k(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

mit Integralkern $k \in L_2(T \times S)$.

a) Zeigen Sie, dass $A \in L(L_2(S), L_2(T))$.

b) Bestimmen Sie den adjungierten Operator A^*.

2. Aufgabe Beschränkte Operatoren — 3 Punkte

Seien X, Y normierte Räume. Zeigen Sie:

Ein linearer Operator $A : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn A beschränkt ist.

3. Aufgabe Kompakte Operatoren — 2 + 2 + 2 = 6 Punkte

a) Zeigen Sie, dass die Identität $I : X \to X$ zwischen unendlichdimensionalen Hilberträumen nicht kompakt ist.

Was gilt im Fall $\dim X < \infty$?

b) Es seien $A \in L(X,Y)$, $B \in K(Y,Z)$ oder $A \in K(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$. Beweisen Sie jeweils, dass der Operator $BA : X \to Z$ kompakt ist.

c) Ist die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, \mathrm{d}x$$

ein kompakter Operator?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Identität $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ mit Hilfe der inversen Fouriertransformation.

4. Aufgabe Eigenwerte und Eigenfunktionen 1 + 3 = 4 Punkte

Gegeben sei der Operator

$$A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$$
$$Af(x) = \int_0^1 xtf(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Begründen Sie, dass eine Spektraldarstellung

$$Af(x) = \sum_n \lambda_n \langle f, v_n \rangle \, v_n(x)$$

aus Eigenfunktionen v_n und Eigenwerten λ_n existiert.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und geben Sie die Spektraldarstellung explizit an.

Abgabe am Montag 1. Juni vor der Vorlesung.