**FACHRICHTUNG 6.1**
**MATHEMATIK**
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

# 3. Übung zu 'Inverse Probleme mit Anwendungen in der Bildrekonstruktion'
# Sommersemester 2015

## 1. Aufgabe Singuläres System 4 + 3 = 7 Punkte

Wir betrachten einen Integraloperator

$$A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1]), \quad Af(y) := \int_0^1 k(y,x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

mit Kern

$$k(y,x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n\, a_n(y)\, b_n(x).$$

Dabei seien $a_n, b_n \in L_2([0,1])$ und $\langle a_n, a_m \rangle = 0 = \langle b_n, b_m \rangle$ für $n \neq m$, und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge positiver, reeller Zahlen.

a) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung von $A$.

b) Es sei nun $a_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) = b_n(x)$ und $\lambda_n = e^{-(n\pi)^2}$. Lösen Sie die Gleichung

$$Af = g \quad \text{mit } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{falls } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

im Raum $X_{-1}(A)$.

**Hinweis:** Verallgemeinerte Inverse für kompakte Operatoren.

## 2. Aufgabe Verallgemeinerte Inverse 1 + 1.5 + 1.5 = 4 Punkte

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen $A^+ : \mathcal{D}(A^+) \to X$:

a) $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{N}(A)^\perp$,

b) Falls $A^{-1}\big|_{\mathcal{R}(A)}$ existiert, dann ist $A^+\big|_{\mathcal{R}(A)} = A^{-1}\big|_{\mathcal{R}(A)}$,

c) $A^+$ ist linear.

**3. Aufgabe Spezialfall endlich-dimensionaler Probleme 0.5 + 2.5 + 2 = 5 Punkte**

Betrachten Sie die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, welche durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

a) Begründen Sie, dass die verallgemeinerte Inverse $A^+$ stetig ist.

b) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung $(\sigma_l, v_l, u_l)_{l=1,2}$ von $A$.

c) Betrachten Sie die Gleichung $Ax = b$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.1\delta \\ 1.9\delta \end{pmatrix}$$

und der exakten Lösung $x = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.9 \end{pmatrix}$. Gemessen werden lediglich fehlerbehaftete Daten

$$b_\epsilon = b + \epsilon_1 u_1 + \epsilon_2 u_2.$$

Berechnen Sie die verallgemeinerte Lösung $x_\epsilon^+$ der Gleichung $Ax = b_\epsilon$. Verwenden Sie hierzu die Reihendarstellung der verallgemeinerten Inverse über die Singulärwertzerlegung. Vergleichen Sie außerdem die relativen Fehler

$$\frac{\|b - b_\epsilon\|}{\|b\|} \quad \text{und} \quad \frac{\|x - x_\epsilon^+\|}{\|x\|}$$

für $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-4}$. Was fällt Ihnen auf?

**Abgabe am Montag 15. Juni vor der Vorlesung.**