FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

4. Übung zu 'Inverse Probleme mit Anwendungen in der Bildrekonstruktion'
Sommersemester 2015

1. Aufgabe Verallgemeinerte Inverse — 2 Punkte

Zeigen Sie: Die verallgemeinerte Inverse eines injektiven Operators $A \in K(X, Y)$ hat die Darstellung

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*.$$

2. Aufgabe Tikhonov-Phillips-Regularisierung I — 3 + 2 = 5 Punkte

a) Zeigen Sie, dass das Tikhonov-Phillips-Verfahren

$$\min_{f \in X} J_\gamma(f) = \|Af - g\|_Y^2 + \gamma\|f\|_X^2$$

ein Regularisierungsverfahren zur Bestimmung der Lösung von $Af = g$ ist.

b) Es seien X, Y Hilberträume, $A \in L(X, Y)$ und $\gamma > 0$. Zeigen Sie, dass jede Lösung des Problems

$$\min_{f \in X} J_\gamma(f) = \|Af - g\|_Y^2 + \gamma\|f\|_X^2$$

auch die *regularisierende Normalgleichung*

$$(A^*A + \gamma I)f = A^*g$$

löst.

3. Aufgabe Tikhonov-Phillips-Regularisierung II — 1 + 5 = 6 Punkte

Betrachten Sie den Operator

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad f \in C([0, 1]).$$

a) Stellen Sie eine diskrete Version der Integralgleichung in der Form

$$B\overline{f} = \overline{g}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \overline{f},\ \overline{g} \in \mathbb{R}^n$$

auf, wobei das Integral an den Stellen $x_k = k/n,\ k = 1, \ldots, n$ durch die Mittelpunktregel

$$\int_0^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right), \qquad t_0 = 0,\ t_i = \frac{i}{n},\ i = 1, \ldots, n$$

approximiert werden soll.

b) Bestimmen Sie mit dem Tikhonov-Phillips-Verfahren eine Näherungslösung der Gleichung $Af = g$ für $g(x) = x^3 - 2x^2$. Verwenden Sie hierzu das Funktional

$$J_\gamma(f) = \|Af - g\|^2 + \gamma\|f\|^2$$

für die verschiedenen Regularisierungsparameter $\gamma_1 = 10^{-3}$, $\gamma_2 = 10^{-4}$, $\gamma_3 = 10^{-5}$, sowie exakte Daten g und $n = 100$.
Stören Sie außerdem die Funktion g durch eine auf $[-0.01, 0.01]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch dar und interpretieren Sie diese.

Hinweis: Der Befehl (2 · rand(n,m)-1) in Matlab erzeugt eine auf $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable der Dimension $n \times m$.

4. Aufgabe Verfahren der Approximativen Inversen 3 Punkte

Gegeben ist wieder der Integraloperator

$$A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1]), \quad Af(y) = \int_0^y f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Berechnen Sie den Rekonstruktionskern ψ_x^γ zum Mollifier

$$e_x^\gamma(z) = \frac{1}{\gamma}\operatorname{sinc}\left(\frac{x-z}{\gamma}\right).$$

Abgabe am Montag 29. Juni vor der Vorlesung.