



5. Übung zu 'Inverse Probleme mit Anwendungen in der Bildrekonstruktion'  
Sommersemester 2015

1. Aufgabe Abgeschnittene Singulärwertzerlegung

6 Punkte

Betrachten Sie den Operator

$$Af(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad f \in L_2([0, 1])$$

und die Diskretisierung aus Aufgabe 3, Übungsblatt 4. Lösen Sie nun die Gleichung  $Af = g$  für  $g(x) = x^3 - 2x^2$  mit der *abgeschnittenen Singulärwertzerlegung*. Verwenden Sie dazu das singuläre System des diskreten Operators  $B$ . Variieren Sie den Regularisierungsparameter, der den Abbruch der Reihenentwicklung steuert, und geben Sie den Defekt im Urbild zur exakten Lösung an. Betrachten Sie auch den Fall gestörter Daten analog zu Aufgabe 3, Blatt 4. Welcher Regularisierungsparameter erscheint Ihnen für  $n = 100$  Datenpunkte als sinnvoll?

Stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch dar.

**Hinweis:** Der Matlab-Befehl  $[U, S, V] = \text{svd}(A)$  liefert die Singulärwertzerlegung von  $A$  in der Darstellung  $A = USV^T$ .

2. Aufgabe Approximative Inverse - Regularisierungsverfahren

3 Punkte

Es sei

$$e_x^\gamma(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{2\gamma^2}\right), \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

$$S^\gamma g(x) := \langle e_x^\gamma, \overline{A^+ g} \rangle$$

eine Regularisierung von  $A^+$  ist.

**Hinweis:** Übungsblatt 1, Aufgabe 1.

3. Aufgabe Radon Transformation

2 + 1 + 1 = 4 Punkte

a) Berechnen Sie die Radon-Transformation der charakteristischen Funktion des Einheitskreises

$$\chi_{V_1(0)}(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

b) Es sei  $T_a f(x) := f(x - a)$  für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Zeigen Sie, dass für die Radon Transformation  $\mathcal{R}$  gilt

$$\mathcal{R}T_a f(\theta, s) = \mathcal{R}f(\theta, s - a^T \theta).$$

c) Sei  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  unitäre Matrix,  $D_U f(x) := f(Ux)$ . Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{R}D_U f(\theta, s) = \mathcal{R}f(U\theta, s).$$

#### 4. Aufgabe Tikhonov-Phillips-Verfahren

5 Punkte

Implementieren Sie das Tikhonov-Phillips-Verfahren aus Übungsblatt 4, Aufgabe 3.

**Abgabe am Montag 6. Juli vor der Vorlesung.**