FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK

Dr. M. Riplinger
Dipl. Math. Y. Johann

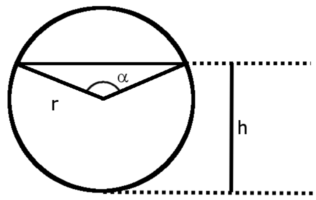
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

3. Übung zu „Modellierung/Programmierung“
Wintersemester 2012/2013

Aufgabe 1 Newton - Verfahren **1 + 3.5 + 2.5 = 7 Punkte**

Herr K. läßt sich im Keller drei baugleiche liegende zylindrische Öltanks mit einem Fassungsvermögen von je 1500 Litern einbauen. Die Konstruktion sei derart, dass das Öl in allen Tanks immer gleich hoch stehe. Nach der Erstlieferung von angeblich 3000 Litern möchte Herr K. nachprüfen, ob tatsächlich die angegebene Menge Öl geliefert worden ist. Er kennt zwar den Radius $r = 0.75$ m, jedoch nicht die Länge L der Tanks. Außerdem kann er die Füllhöhe h der Tanks messen. Wie hoch müsste das Öl stehen, wenn 3000 Liter Öl geliefert worden sind?

Leiten Sie zunächst eine vom Radius r, der Tanklänge L sowie vom Winkel α (vgl. Skizze) abhängige Formel für das Volumen V_{Luft} des mit Luft gefüllten Teils des Tanks her. Bilden Sie anschließend den Quotienten V_{Luft}/V_{Tank}, der eine nichtlineare Gleichung für den Winkel α liefert.



Die exakte Lösung nichtlinearer Gleichungen der Form $f(\alpha) = 0$ ist oft nicht möglich. Deshalb berechnet man die Lösung solcher Gleichungen näherungsweise, z.B. mit dem *Newton-Verfahren*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Damit das Verfahren konvergiert, muss der Startwert α_0 hinreichend nahe an der gesuchten Nullstelle gewählt werden.

a) Schreiben Sie Funktionen `double f(double alpha)` und `double df(double alpha)`, welche die Funktionswerte der Funktion $f(\alpha)$ und deren Ableitung $f'(\alpha)$ zurückgeben. Die Ableitung $f'(\alpha)$ dürfen Sia anlatytisch vorberechnen.

b) Schreiben Sie eine Funktion `double newton(double alpha_0, double eps, int N_max)` zur Berechnung der Nullstelle der nichtlinearen Gleichung. Das Verfahren soll abbrechen, wenn entweder der Abstand zwischen zwei Iterierten eine gewisse Genauigkeit

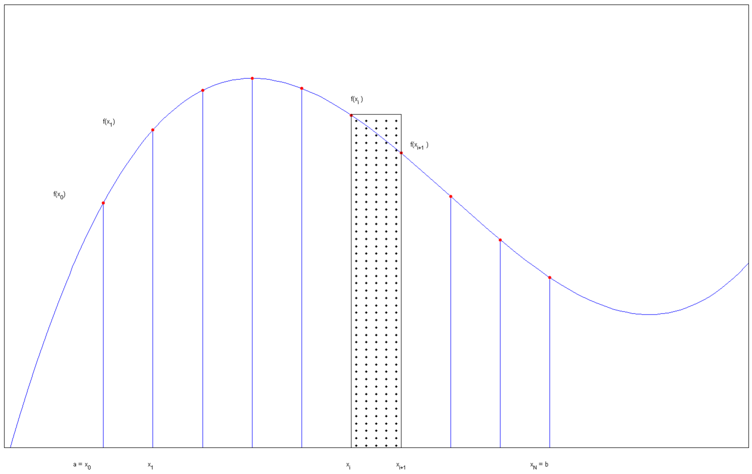
$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq eps$$

oder eine maximale Anzahl N_{max} von Schleifendurchläufen erreicht wurde. Die gesuchte Nullstelle sowie die Anzahl der benötigten Schleifendurchläufe sollen am Bildschirm ausgegeben werden. Schreiben Sie ein Hauptprogramm, in dem die Werte $N_{\max}, eps$ und α_0 vom Benutzer erfragt werden.

c) Erweitern Sie das Hauptprogramm derart, dass die Füllhöhe h der Tanks, wenn tatsächlich 3000 Liter Öl geliefert worden sind, am Bildschirm ausgegeben wird. Testen Sie Ihr Programm für $eps = 10^{-4}$ und den Startwert $\alpha_0 = 2$.

Aufgabe 2 Summierte Rechteckregel zur numerischen Integration   4.5 + 1.5 + 1 = 7 Punkte

Bei der Berechnung von Integralen kann die Stammfunktion des Integranden selten explizit angegeben werden. Um dieses Problem zu umgehen, berechnet man die gesuchte Lösung nicht exakt, sondern näherungsweise. Eine Möglichkeit, den gesuchten Flächeninhalt zwischen der funktion und der X-Achse über einem Intervall $[a, b]$ zu approximieren, ist die Zerlegung der gesamten Fläche in einzelne Rechtecke. Das Intervall



$[a, b]$ wird hierbei äquidistant zerlegt, d.h. alle Rechtecke haben dieselbe Breite. Bei $N + 1$ Stützstellen, den sogenannten Knoten, gilt für den Abstand zweier benachbarter Knoten

$$h = \frac{b - a}{N}.$$

Die Knoten erhält man durch $x_i = a + i \cdot h$. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gegeben durch

$$A_i = h \cdot f(x_i), \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

Durch Aufsummieren dieser einzelnen Flächen erhält man die gesuchte Näherungslösung:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} A_i = h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i).$$

a) Schreiben Sie eine Funktion `double rechteck (double, double, int)`, die den Wert des Integrals der Funktion $f(x) = \ln(x)$ über dem Intervall $[a, b]$ mit $N + 1$ Stützstellen berechnet.

   Hinweis: Es gilt $\ln(x) < 0$ für $x < 1$. Die Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$ ist $F(x) = x \ln(x) - x$.

b) Schreiben Sie ein Hauptprogramm, in dem die Parameter a, b und N vom Benutzer erfragt werden. Überprüfen Sie anschliessend, ob die eingegebenen Werte gültig sind, d.h. ob $N > 0$ und $0 < a < b$ gilt.

c) Vergleichen Sie das Ergebnis der Approximation mit der exakten Lösung, indem Sie im Hauptprogramm den prozentualen Fehler zwischen der exakten und approximierten Lösung berechnen und diesen am Bildschirm ausgeben.

Aufgabe 3 Rekursion und Iteration 3 + 3 + 0 = 6 Punkte

Im Folgenden werden zwei Alternativen vorgestellt, die Potenz $\text{potenz}(b, e) = b^e, b \in \mathbb{R}, e \in \mathbb{N}$, zu berechnen.

- Die einfachste Methode, eine Potenz zu berechnen, ist

  $$\text{potenz}(b, e) = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{e-mal}} = b \cdot \text{potenz}(b, e-1).$$

  Allerdings ist diese auch entsprechend aufwändig.

- Macht man sich die Beziehung $b^e = b^{e/2} \cdot b^{e/2}$ zu Nutze, kann man mit Hilfe des folgenden Algorithmus die Laufzeit erheblich reduzieren. Zum einen gilt $\text{potenz}(b, 0) = 1$ und für $e \neq 0$:

  $$\text{potenz}(b, e) = \begin{cases} 1, & \text{falls } e = 0 \\ b, & \text{falls } e = 1 \\ b \cdot \text{potenz}(b, e-1), & \text{falls } 0 \neq e \text{ ungerade} \\ \text{potenz}(b, e/2)^2, & \text{falls } 0 \neq e \text{ gerade} \end{cases}$$

a) Auf der Homepage zur Vorlesung finden Sie die iterativen und rekursiven Implementierungen der oben beschriebenen Algorithmen. Diese sind jedoch nicht vollständig. Ergänzen Sie die durch `/* XXX */` markierten Lücken im Quellcode.

   Hinweis: Berechnen Sie `z = potenz(b,e/2); z *= z;` Weiterhin gilt bei ganzzahliger Division von Integer-Werten: `potenz(b,e/2) = potenz(b,(e-1)/2)`, falls `e` ungerade.

b) Vergleichen Sie die Laufzeiten der beiden Algorithmen, indem Sie die Anzahl der Gleitkomma - Mulitplikationen auf dem Bildschirm ausgeben. Wieso können bei den rekursiven Verfahren keine lokalen Variablen als Zähler verwendet werden?

c*) Vergleichen Sie für Potenzen b^{2^k}, also mit **Exponenten** $e = 2^k, k \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Funktionsaufrufe im ersten rekursiven Algorithmus und den beiden Versionen des zweiten rekursiven Algorithmus mit und ohne Zwischenspeicherung, d.h, `z = potenz(b,e/2)*potenz(b,e/2)`. Welche Version ist am effizientesten?

   Hinweis: Es gilt $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$.

Aufgabe 4*

Gegeben sei das folgende Programm:

```c
# include<stdio.h>

//Funktionsdeklaration
int a_ = 42;

int summe(int a, int b);

//Hauptprogramm
int main()
{
  int a = 4, b = 7;

  b = summe(a, b + a_--);
  printf("a = %d, b = %d\n", a, b);

  {
    int a_ = -42, b_ = 7;
    printf("a_ = %d, b_ = %d\n", ++a_, b_);
  }

  printf("a_ = %d\n", ++a_);
  printf("b_ = %d\n", b_);

  return 0;
}
//Funktionsdefinition
int summe(int a, int b)
{
  a = a + b;
  b = b + a_;
  return a;
}
```

a) Welchen Fehler gibt der Compiler beim Übersetzen dieses Programms aus? Aus welchem Grund?

b) Welche Ausgabe liefert das Programm, wenn die fehlerhafte Zeile auskommentiert ist?

i)
```
a = 4, b = 52
a_ = -43, b_ = 7
a_ = 43
```

ii)
```
a = 4, b = 53
a_ = -41, b_ = 7
a_ = 42
```

iii)
```
a = 53, b = 90
a_ = -42, b_ = 7
a_ = -41
```

Abgabe bis zum 5. Dezember 2012, 19.00 Uhr per E-Mail an Ihren Bremser.