1. Herleitung der nichtlinearen Gleichung für α

Für den Flächeinhalt A_{Luft} gilt

$$A_{\text{Luft}} = A_{\text{Kreisausschnitt}} - A_{\text{Dreieck}} = r^2\frac{\alpha}{2} - \frac{r^2}{2}\sin(\alpha) = \frac{r^2}{2}\big(\alpha - \sin(\alpha)\big)$$

und somit für das Volumen V_{Luft}

$$V_{\text{Luft}} = A_{\text{Luft}} \cdot L = \frac{r^2}{2}\big(\alpha - \sin(\alpha)\big)L.$$

Problem: In dieser Gleichung sind sowohl der Winkel α als auch die Länge L der Tanks unbekannt.
Ausweg: Bilde den Quotienten $\frac{V_{\text{Luft}}}{V_{\text{Tank}}}$, damit sich die Variable $L > 0$ wegkürzt:

$$\frac{V_{\text{Luft}}}{V_{\text{Tank}}} = \frac{\frac{r^2}{2}\big(\alpha - \sin(\alpha)\big)L}{\pi r^2 L} = \frac{1}{2\pi}\big(\alpha - \sin(\alpha)\big).$$

Sind tatsächlich 3000 Liter Öl geliefert worden, müssten sich in jedem Tank 1000 Liter befinden. Da das Volumen V_{Tank} eines Tanks 1500 Liter beträgt, gilt für das Volumen $V_{\text{Luft}} = 500$ Liter und demnach

$$\frac{V_{\text{Luft}}}{V_{\text{Tank}}} \overset{!}{=} \frac{500}{1500} \iff \frac{1}{2\pi}\big(\alpha - \sin(\alpha)\big) = \frac{1}{3} \iff \alpha - \sin(\alpha) - \frac{2}{3}\pi = 0.$$

2. Newton-Verfahren zur Berechung von α

Es ist

$$f(\alpha_n) = \alpha_n - \sin(\alpha_n) - \frac{2}{3}\pi \qquad \text{und} \qquad f'(\alpha_n) = 1 - \cos(\alpha_n).$$

Das zugehörige Newton-Verfahren lautet demnach

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)} = \alpha_n - \frac{\alpha_n - \sin(\alpha_n) - \frac{2}{3}\pi}{1 - \cos(\alpha_n)}.$$

3. Berechnung der Füllhöhe h

Es ist $h = r + h_{\text{Dreieck}}$. Die Höhe h_{Dreieck} des Dreiecks erhält man über dessen Flächeninhalt. Weil dessen Grundseite gerade die Kreissehne $s = 2r\sin(\frac{\alpha}{2})$ ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2} \cdot s \cdot h_{\text{Dreieck}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2r\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) \cdot (h - r) \\ &= r\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) \cdot (h - r) \end{aligned}$$

Wegen $A_{\text{Dreieck}} = \frac{r^2}{2}\sin(\alpha)$ muss demnach die folgende Gleichung erfüllt sein:

$$\frac{r^2}{2}\sin(\alpha) \overset{!}{=} r\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) \cdot (h - r) \iff h = \frac{r\sin(\alpha)}{2\sin(\frac{\alpha}{2})} + r$$

Mit $r = 0.75$ m und $\alpha \approx 2.65$ ergibt sich eine Füllhöhe von $h \approx 0.95$ m, sofern die angegebene Menge Öl geliefert worden sind.