FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

1. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab!

1. Aufgabe Fourier-Tansformation I $\quad 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es bezeichne $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ die Fourier-Transformierte von f. Zeigen Sie:

a) $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{f}(-\xi) = \widehat{f}(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

c) $\mathcal{F}^4 f = f$,

d) Die Fourier-Transformation ist eine Bijektion auf der Menge

$$\mathcal{S}_{\mathrm{e}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\middle|\; f(x) = f(-x) \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Aufgabe Fourier-Tansformation II $\quad 1 + 2 + 1 = 4$ Punkte

Berechnen Sie durch geschickte Anwendung der Eigenschaften der Fourier-Transformation die Transformierten folgender Funktionen:

a) $B_1 = \chi_{[-1/2,1/2]} * \chi_{[-1/2,1/2]}, \qquad \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

b) $G_{c,\gamma}(x) = \gamma^{-1} \exp\left(-\dfrac{(x-c)^2}{2\gamma^2} \right)$,

c) $h(x) = (x^2 - 1)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. Aufgabe Funktionenräume $2 + 2 + 2 + 1 = 7$ Punkte

a) Weisen Sie nach, dass weder $L_2(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R})$ noch $L_1(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$ gilt.

b) Sei $I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ein beschränktes Intervall. Zeigen Sie für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r > s$ die Inklusion

$$L_r(I) \subset L_s(I).$$

c) Beweisen Sie, dass für alle $p \in [1, \infty]$ gilt:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R}).$$

Hinweis: Verwenden Sie $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(1 + |x|^2)^m \, \phi(x)\right| < \infty$ für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit passendem $m \in \mathbb{N}$.

d) Der Sobolev-Raum $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, ist definiert durch

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \|f\|_{H^s} < \infty \right\}$$

mit

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Zeigen Sie $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Abgabe am Donnerstag, 31. Oktober, vor der Vorlesung.