FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

10. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Kaczmarz-Verfahren — 2 + 1 + 1 = 4 Punkte

Das *Verfahren von Kaczmarz* zur Lösung von $Ax = b$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ist durch die Iterationsvorschrift

$$x^{k,j} = x^{k,j-1} + \omega\,\frac{b_j - a_j x^{k,j-1}}{\|a_j^\top\|_2^2}\,a_j^\top, \quad \text{für } j = 1,\dots,N,$$

mit $x^{k,0} = x^k$ und $x^{k+1} = x^{k,N}$, und einen beliebigen Startwert $x^0 \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Dabei bezeichne a_j die j-te Zeile der Matrix A und $\omega \in [0,2]$ den Relaxationsparameter.

a) Führen Sie die ersten 3 Iterationen des Kaczmarz-Verfahrens für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = 1 \quad \text{und} \quad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch und geben Sie für jeden Schritt den Fehler $\|x^* - x^{k,j}\|$ an, wobei x^* die exakte Lösung von $Ax = b$ bezeichne.

b) Lösen Sie zunächst das Gleichungssystem grafisch, skizzieren Sie danach den Iterationsverlauf.

c) Wir erweitern nun das LGS um die Gleichung $x + y = -1$. Skizzieren Sie erneut den Iterationsverlauf und begründen Sie das Ergebnis.

2. Aufgabe ART — 3 + 2 + 2 = 7 Punkte

Für die linearen Operatoren $R_j : H \to H_j$ zwischen Hilberträumen H, H_j für $j = 1,\dots,N$ betrachten wir die in der Vorlesung vorgestellte Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} f^{k,0} &= f^k, \\ f^{k,j} &= f^{k,j-1} + \omega R_j^* C_j^{-1}(g_j - R_j f^{k,j-1}), \quad \text{für } j = 1,\dots,N, \\ f^{k+1} &= f^{k,p}, \end{aligned}$$

zur Lösung von

$$Rf := \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie für $g \in \mathrm{Im}(R)$, $\omega \in [0,2]$ und $C_j - R_j R_j^*$ positiv semidefinit für alle $j = 1, \dots, N$:

$$\left\| f^+ - f^{k,j} \right\|^2 \leq \left\| f^+ - f^{k,j-1} \right\|^2 \qquad \forall\, k, j \in \{1, \dots, N\}.$$

b) Im zweidimensionalen Fall mit diskreten Daten (θ_r, s_l), für $r = 1, \dots, p$, $l = -q, \dots, q$ und $N = p(2q+1)$ sind die Hilberträume durch $H = L_2(\mathbb{R}^2)$ und $H_j = \mathbb{R}$ gegeben.

   i) Wir approximieren die gesuchte Lösung f durch Funktionen $\{b_i\}_{i=1}^M$:

$$f(x) \approx f^M(x) = \sum_{i=1}^{M} f_i b_i(x), \quad f_i \in \mathbb{R}.$$

   Bestimmen Sie die 2D Radon-Transformation der Pixelbasis b_i, definiert durch

$$b_i(x) := b(x - x_i) := \chi_{[-1,1]^2}(x - x_i).$$

   ii) Zeigen Sie, dass sich ART mit $C_j = R_j R_j^*$ für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ als Kaczmarz-Verfahren zur Bestimmung von f^M schreiben lässt. Dazu seien die Operatoren R_j durch $R_{rp+l} f = \mathcal{R}_{\theta_r} f(s_l)$ für $r = 1, \dots, p$ und $l = -q, \dots, q$ definiert.

3. Aufgabe Nullraum der Radon-Transformation 2 + 3 = 5 Punkte

Es sei $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z, w^{-1})$ die 2D Radon-Transformation mit $w(s) = (1 - s^2)^{1/2}$, wobei Ω die Einheitskreisscheibe und Z den Einheitszylinder bezeichnet. Es sei $A_p := \{\theta_1, \dots, \theta_p\}$ für paarweise verschiedene Richtungen $\theta_1, \dots, \theta_p \in \mathcal{S}^1$ und

$$\mathcal{N}_{A_p} = \left\{ f \in L^2(\Omega) : Rf(\theta, \cdot\,) = 0 \text{ für alle } \theta \in A_p \right\}$$

bezeichne den Nullraum der Radon-Transformation bzgl. dieser Richtungen. Für Elemente f aus $\mathcal{N}_{A_p}$ hat die Radon-Transformation folgende Gestalt:

$$Rf(\theta, s) = w(s) \sum_{m \geq p} U_m(s) q_m(\theta), \qquad \text{mit} \quad U_m(\cos(\phi)) = \frac{\sin((m+1)\phi)}{sin(\phi)}.$$

Zeigen Sie:

a) $J_k(x) = \dfrac{i^{-k}}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \exp(ix\cos(\phi))\,\cos(k\phi)\,\mathrm{d}\phi$

b) $\hat{f}(\sigma\theta) = \displaystyle\sum_{m \geq p} i^m \sigma^{-1} J_{m+1}(\sigma) \tilde{q}_m(\theta)$, wobei $\tilde{q}_m(\theta) = 0$ für $\theta \in A_p$ gilt.

Abgabe am Donnerstag, 23. Januar, vor der Vorlesung.