FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

11. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Fächerstrahlgeometrie — 3 Punkte

In der Vorlesung wurden Koordinaten der Fächerstrahlgeometrie wie folgt eingeführt:

$$\begin{aligned} s &= r\sin\beta \\ \varphi &= \alpha + \beta - \tfrac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hierbei sind s und φ die Koordinaten der parallelen Geometrie und $r > 1$ der Radius der Abtastkurve. Zeigen Sie:
Das Bild von $[-1,1] \times [0,\pi]$ in der s,φ-Ebene ist in der α,β-Ebene die Menge

$$\left\{ (\alpha,\beta) \in [0,2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \;\middle|\; \tfrac{\pi}{2} - \overline{\beta} \le \alpha \le \tfrac{3\pi}{2} + \overline{\beta}\,,\ \beta_-(\alpha) \le \beta \le \beta_+(\alpha) \right\}$$

mit

$$\overline{\beta} = \arcsin\left(\tfrac{1}{r}\right) \quad , \quad \beta_-(\alpha) = \max\left\{\tfrac{\pi}{2} - \alpha, -\overline{\beta}\right\} \quad , \quad \beta_+(\alpha) = \min\left\{\tfrac{3\pi}{2} - \alpha, \overline{\beta}\right\}.$$

2. Aufgabe Röntgen-Transformation — 2 + 2 = 4 Punkte

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in S^{n-1}$ und $x \in \theta^\perp$ ist die *Röntgen-Transformation* durch

$$\mathcal{P}f(\theta,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t\theta)dt$$

definiert. Zeigen Sie:

a) (*Projektionssatz*)

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{P}f(\theta,\cdot)\right)(\eta) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}f(\eta) \qquad \forall\, \eta \in \theta^\perp.$$

b) Für $h(x) := |x|^{1-n}$ gilt:

$$\mathcal{P}^*\mathcal{P}f = 2h * f.$$

3. Aufgabe Divergente Röntgen-Transformation **1 + 3 + 2 = 6 Punkte**

Es bezeichne

$$D_a f(\theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta)\mathrm{d}t, \quad a \in \mathbb{R}^3,\, \theta \in S^2$$

die *divergente Röntgentransformation.*

a) Zeigen Sie, dass sich D_a homogen vom Grad -1 fortsetzen lässt, d.h

$$D_a f(r\theta) = |r|^{-1} D_a f(\theta) \text{ für alle } r \neq 0.$$

b) Zeigen Sie für $\xi \in S^2$:

$$\mathcal{F}(D_a f)(\xi) + \mathcal{F}(D_a f)(-\xi) = (2\pi)^{-1/2} \left(I^{-1} Rf(\xi, a^T\xi)\right).$$

c) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad -2. Zeigen Sie für alle $\theta \in S^2$:

$$\int_{S^2} D_a f(\omega) h(\omega^T\theta)\mathrm{d}\omega = \int_{\mathbb{R}} Rf(\theta, s) h(s - a^T\theta)\mathrm{d}s.$$

4. Aufgabe Approximative Inverse **1 + 2 = 3 Punkte**

Wir betrachten das Verfahren der Approximativen Inversen zur Rekonstruktion der Funktion f aus der Gleichung $\mathcal{R}f = g$. Dabei bezeichnet $\mathcal{R} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(Z^1)$ die zweidimensionale Radon-Transformation mit $Z^1 := S^1 \times \mathbb{R}$. Wir wählen einen Mollifier $e_\gamma(x, \cdot)$ und lösen das Hilfsproblem

$$\mathcal{R}^*\psi_\gamma(x, \cdot) = e_\gamma(x, \cdot) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Die Approximative Inverse liefert dann die Näherung $f_\gamma(x) = \langle e_\gamma(x, \cdot), f\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)}$ an die Funktion f durch

$$S_\gamma g(x) = \langle \psi_\gamma(x, \cdot), g\rangle_{L_2(Z^1)}.$$

a) Sei $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^2))$ ein linearer Operator. Ändern Sie das Hilfsproblem so ab, dass die Approximative Inverse mit dem dadurch berechneten Rekonstruktionskern $\psi_\gamma^{\mathrm{L}}(x, \cdot)$ die Funktion $\mathrm{L}f$ durch $(\mathrm{L}f)_\gamma = \langle e_\gamma(x, \cdot), \mathrm{L}f\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)}$ approximiert. (Verifizieren Sie das Ergebnis!)

b) Für $f, e_\gamma(x, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und festes $k \in \{1, 2\}$ betrachten wir den Operator $\mathrm{L} := \frac{\partial}{\partial x_k}$. Zeigen Sie, dass sich der Rekonstruktionskern durch

$$\psi_\gamma^{\mathrm{L}} = -\frac{1}{4\pi}\theta^k \frac{\partial}{\partial s} I^{-1}\mathcal{R}e_\gamma$$

berechnen lässt.

Abgabe am Donnerstag, 30. Januar, vor der Vorlesung.