FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

2. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Fourier-Transformation — 1.5 + 2.5 = 4 Punkte

a) Seien $f, \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ mit $f(0) \neq 0 \neq \widehat{f}(0)$. Desweiteren sei

$$T = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{die Zeitdauer,}$$

$$B = \frac{1}{\widehat{f}(0)} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{die Bandbreite}$$

des Signals f. Zeigen Sie $TB = 2\pi$.

b) Die Funktionen f, f' und $x \mapsto xf(x)$ seien Elemente von $L^2(\mathbb{R})$. Weiterhin sei $\|f\|_{L^2} = 1$. Beweisen Sie die *Heisenberg'sche Unschärferelation*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\,\mathrm{d}\xi\right) \geq \frac{1}{4}.$$

Hinweis: Wenden Sie partielle Integration auf

$$\int_{\mathbb{R}} x\overline{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x$$

an und benutzen Sie die Hölder-Ungleichung.

2. Aufgabe Distributionen — 2 + 2 = 4 Punkte

a) Berechnen Sie die zweite distributionelle Ableitung $D^2 f$ von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \neq 0$ stetig differenzierbar. In $x = 0$ habe f einen Sprung der Höhe $\alpha > 0$, d. h.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \big(f(\epsilon) - f(-\epsilon)\big) = \alpha.$$

Berechnen Sie die distributionelle Ableitung $f' = Df$.

3. Aufgabe   Poisson-Summenformel   3 Bonuspunkte

Sei

$$\Theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 t), \quad t > 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Summenformel:

$$\Theta(t) = t^{-1/2}\,\Theta(t^{-1}).$$

Abgabe bis Freitag, 8. November, 12:00 Uhr, im Briefkasten des Lehrstuhls Louis (Geb. E2 4, EG) oder bei den Übungsleitern (Geb. E1 1, 4. Stock, Raum 4.16 oder 4.09).