FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

3. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Spezielle Funktionen und Distributionen $2 + 1 + 2 + 2 = 7$ Punkte

Der Dirichlet-Kern D_k der Ordnung $k \in \mathbb{N}_0$ ist definiert als

$$D_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie die Darstellung

$$D_k(x) = U_{2k}\big(\cos\left(x/2\right)\big)$$

mit den *Tschebyscheff-Polynomen 2. Art*

$$U_m(\cos x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((m+1)x\big)}{\sin x}, & x \notin \pi\mathbb{Z} \\ m+1, & x = l\pi,\ l \in \mathbb{N}_0 \\ (-1)^m(m+1), & x = -l\pi,\ l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

b) Beweisen Sie, dass die Fourier-Transformierte von D_k im distributionellen Sinn gegeben ist durch

$$\widehat{T}_{D_k} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-k}^{k} \delta_n.$$

c) Weisen Sie nach, dass die Distribution $(2\pi)^{-1/2}\,\widehat{T}_{D_k}$ gegen die Shah-Distribution

$$\text{Ш} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$$

konvergiert.
Hinweis: Die Konvergenz muss im Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ der temperierten Distributionen nachgewiesen werden. Die Norm auf $\mathcal{S}'$ ist definiert durch

$$\|T\|_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} = \sup_{0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} \frac{|T(\varphi)|}{\|\varphi\|_{\mathcal{S}}}.$$

d) Für $N \in \mathbb{N}$ ist der N-te *Fejér-Kern* F_N definiert durch

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x).$$

(Die Fejér-Kerne spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Fourier-Reihen.)
Zeigen Sie:

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}\frac{1-\cos(Nx)}{1-\cos x}, & x \notin \pi\mathbb{Z}, \\ N, & x \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. Aufgabe Spezielle Funktionen II **$1+1+2+3+1+1=9$ Punkte**

Die *Hermite-Polynome* sind definiert als

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

a) Berechnen Sie H_0 und H_1.

b) Zeigen Sie die Rekursionsformel

$$H_n'(x) = xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

c) Beweisen Sie induktiv und mit Hilfe von b) die Rekursionsformel

$$H_n' = nH_{n-1}.$$

Folgern Sie hieraus die *Drei-Term-Rekursion*

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

(Diese Formel wird üblicherweise zur numerischen Auswertung der Hermite-Polynome verwendet.)

d) Leiten Sie die *Orthogonalitätsrelation*

$$\langle H_n, H_m\rangle_{L_2(\mathbb{R},w(x)\mathrm{d}x)} = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)\, H_m(x)\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}n!\,\delta_{nm}$$

der Hermite-Polynome auf dem gewichteten Raum $L_2(\mathbb{R}, w(x)\mathrm{d}x)$ mit $w(x) = e^{-x^2/2}$ her.
(Es lässt sich sogar zeigen, dass die Hermite-Polynome ein vollständiges System auf diesem Raum bilden.)

e) Berechnen Sie das gewichtete Fourier-Integral

$$F_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)\, e^{ix\xi}\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

f) Wie können die Funktionen F_n verwendet werden, um das *Fourier-Hermite-Integral*

$$h(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{ix\xi}\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

einer Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}, w(x)\mathrm{d}x)$ zu approximieren?

Abgabe am Donnerstag, 14. November, vor der Vorlesung.