FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

4. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Radon-Transformation 1 + 3 = 4 Punkte

Sei

$$\Gamma := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 > \frac{1}{4},\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}.$$

a) Skizzieren Sie die Menge Γ.

b) Berechnen Sie die Radon-Transformation der charakteristischen Funktion der Menge Γ.

2. Aufgabe Radialsymmetrische Funktionen I 2 + 2 + 3 = 7 Punkte

Sei $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < 1 \right\}$ die Einheitskreisscheibe, und $\phi : [0,1) \to \mathbb{C}$ sei hinreichend glatt mit $\operatorname{supp}\phi \subset\subset [0,1)$ (kompakter Träger). Die radialsymmetrische Funktion f sei erklärt durch

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \phi(|x|).$$

a) Zeigen Sie:

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \mathcal{A}\phi(|s|), \quad s \in (-1, 1).$$

mit der *Abel-Transformation*

$$\mathcal{A}\phi(s) = 2 \int_s^1 \frac{r\phi(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} \, \mathrm{d}r.$$

b) Berechnen Sie die Abel-Transformierten von $\phi_0(r) = 1$ und (formal) $\phi_{-1}(r) = r^{-1}$.
Hinweis: Verwenden Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \operatorname{atanh}\left(\sqrt{1 - s^2}\right) = -\frac{1}{s\sqrt{1 - s^2}}.$$

c) Beweisen Sie die Inversionsformel

$$\mathcal{A}^{-1}\psi(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^1 \frac{\psi'(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} \, \mathrm{d}s.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst (unter der Annahme $\phi \in C^1$)

$$\mathcal{A}\phi(s) = -2 \int_s^1 \phi'(r)\sqrt{r^2 - s^2}\,\mathrm{d}r.$$

Zur Lösung des Integrals verwenden Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(ax) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}.$$

3. Aufgabe Radialsymmetrische Funktionen II 3 + 1 + 1 = 5 Punkte

Es werden nun radialsymmetrische Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^2$ betrachtet, d. h. für $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ gilt $f(x) = \phi(|x|)$.

a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation einer radialsymmetrischen Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ gegeben ist durch $\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{H}_0\phi(|\xi|)$ mit der *Hankel-Transformation*

$$\mathcal{H}_0\phi(\sigma) = \int_0^\infty s\,\phi(s)\,J_0(s\sigma)\,\mathrm{d}s, \quad \sigma \geq 0.$$

Hierbei ist J_0 die *Bessel-Funktion mit Index 0*,

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(it\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Was ist die Inverse der Hankel-Transformation? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Leiten Sie die Operatorgleichung

$$\mathcal{F}_1\mathcal{A} = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{H}_0$$

mit der eindimensionalen Fourier-Transformation $\mathcal{F}_1$ her.

c) Berechnen Sie das Parameterintegral

$$I(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2\gamma^2}}\,s\,J_0(s\sigma)\,\mathrm{d}s, \quad \sigma \geq 0.$$

Abgabe am Donnerstag, 21. November, vor der Vorlesung.