FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

5. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Radon-Trafo und Differentiation 1 + 1 + 1 + 3 + 1 = 7 Punkte

Sei $C^{n-1} = \mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ der n-dimensionale Einheitszylinder und $g \in S(C^{n-1})$.

a) Zeigen Sie:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{R}^* g = \mathcal{R}^* \Big(\omega_k \frac{\partial}{\partial s} g \Big).$$

mit der Ableitung $\partial/\partial s$ nach dem zweiten Argument auf C^{n-1}. Geben Sie entsprechend eine Darstellung für $\Delta \mathcal{R}^* g$ an, wobei $\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$ der Laplace-Operator ist.

b) Leiten Sie hieraus eine Rekonstruktionsformel zur Berechnung von Δf aus $g = \mathcal{R} f$ her.

c) Weisen Sie nach, dass $\partial/\partial s$ und das Riesz-Potential $\mathcal{I}^\alpha$ $(\alpha < n)$ auf $S(C^{n-1})$ kommutieren.

d) Beweisen Sie den Projektionssatz für die Rückprojektion:

$$\mathcal{F}\mathcal{R}^* g(\xi) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} |\xi|^{1-n} \bigg(\mathcal{F}_1 g\Big(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\Big) + \mathcal{F}_1 g\Big(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\Big) \bigg), \quad \xi \neq 0,$$

wobei die 1D-Fouriertransformation $\mathcal{F}_1$ sich auf das zweite Argument in C^{n-1} bezieht.
Hinweis: Fassen Sie $\mathcal{R}^* g$ als Distribution auf und nutzen Sie aus, dass $\mathcal{R}^{**} = \mathcal{R}$ gilt.

e) Wenden Sie die Fourier-Transformation auf die Formel in b) an. Geben Sie an, wie diese Darstellung zur Rekonstruktion von Δf praktisch genutzt werden kann.

2. Aufgabe Fourier: Asymptotik und Differentiation 2.5 + 1.5 + 1 = 5 Punkte

a) Zeigen Sie: Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$, so liegt $\widehat{f}$ in

$$C_0(\mathbb{R}) = \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ stetig} \;\big|\; f(x) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty \big\}.$$

Hinweis zur Asymptotik: Verwenden Sie die Dichtheit von $S(\mathbb{R})$ in $L_1(\mathbb{R})$.

b) Seien $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{N}$. Es existieren Konstanten $R, C, \epsilon > 0$ mit

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^{k+1+\epsilon}} \quad \text{für alle } |x| > R.$$

Zeigen Sie: $\widehat{f}$ ist k-mal stetig differenzierbar.

c) Beweisen Sie die Umkehrung: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei k-mal stetig differenzierbar mit $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$. Weisen Sie nach, dass die Abschätzung

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{(2\pi)^{-1/2} \|f^{(k)}\|_{L_1}}{|\xi|^k}$$

für $\xi \neq 0$ gilt.

3. Aufgabe Bandbeschränktheit **1.5 + 1.5 + 1 = 4 Punkte**

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt b-bandbeschränkt, wenn $\widehat{f}(\xi) = 0$ für $\xi \notin [-b, b]^n$. Ist $\widehat{f}(\xi)$ „klein" außerhalb von $[-b, b]^n$, spricht man von wesentlicher Bandbeschränktheit.

a) Zeigen Sie: Jede Funktion $0 \neq f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s > n/2$ ist wesentlich bandbeschränkt in dem Sinne, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus [-b,b]^n} |\widehat{f}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \leq \left(\frac{|S^{n-1}|}{2s - n} \right)^{1/2} \|f\|_{H^s} \, b^{-s+n/2}.$$

b) Betrachten Sie die Dichtefunktion der *Cauchy-Verteilung*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + (x - t)^2}, \quad s > 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Verwenden Sie Aufgabe 2 c) mit $k = 2$, um eine Abschätzung für $|\widehat{f}(\xi)|$ herzuleiten.

c) Geben Sie eine Schranke für

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-b,b]} |\widehat{f}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi$$

in Abhängigkeit von $b > 0$ an. Wie groß ist der Fehler der Sinc-Reihe zu f bei Abtastung mit Nyquist-Rate π/b?

Abgabe am Donnerstag, 28. November, vor der Vorlesung.