FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

6. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Sobolev-Räume — 2 + 1 = 3 Punkte

Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit kompaktem Träger und $p \in L_1(\mathbb{R})$.

a) Zu $v \in \mathcal{S}^1$ sei

$$\mathcal{A}_p f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + tv)\, p(t)\, \mathrm{d}t.$$

Schreiben Sie $\mathcal{A}_p f$ als Faltung $f * T$ mit einer temperierten Distribution $T = T_\psi$. Berechnen Sie $\widehat{T}$.

b) Weisen Sie nach, dass für $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$ die Funktion g mit

$$g(x) = \int_0^\tau f(x + tv)\, \mathrm{d}t$$

ebenfalls ein Element von $H^s(\mathbb{R}^2)$ ist.

2. Aufgabe Gedämpfte Radon-Transformation — 1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte

Die *gedämpfte Radon-Transformation* mit konstanter Absorption $\mu \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\mathcal{R}_\mu f(\omega, s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp)\, e^{\mu t}\, \mathrm{d}t$$

für $f \in S(\mathbb{R}^2)$.

a) Zeigen Sie die Verallgemeinerung des Projektionssatzes:

$$\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_{\mu,\omega} f(\sigma) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}_2 f(\sigma\omega + i\mu\omega^\perp)$$

mit $\mathcal{R}_{\mu,\omega} f(s) = \mathcal{R}_\mu f(\omega, s)$.

b) Berechnen Sie (formal) den L_2-adjungierten Operator $\mathcal{R}_\mu^*$.

c) Schreiben Sie $\mathcal{R}_{-\mu}^* \mathcal{R}_\mu$ als Faltungsoperator. Wieso lässt sich diese Darstellung nicht verwenden, um f mittels Fourier-Transformation zu berechnen?

3. Aufgabe Sinc-Reihen I **3 + 1 + 1 = 5 Punkte**

Wir betrachten die Funktionen

$$\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi_k(x) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - kh)\right)$$

für $k \in \mathbb{Z}^n$.

a) Zeigen Sie: $\{\varphi_k\}_k$ bildet ein orthogonales Funktionensystem, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\varphi_l(x)dx = \begin{cases} h^n & , k = l \\ 0 & , k \neq l. \end{cases}$$

b) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) := \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ist 1-bandbeschränkt.

c) Entwickeln Sie die Funktion f in eine sinc-Reihe, d.h. finden Sie eine Darstellung

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_k(x),$$

wobei h als Nyquistrate zu wählen ist.

4. Aufgabe Sinc-Reihen II **2 + 1 = 3 Punkte**

a) Zeigen Sie:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}^2(\pi k - a) = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a) die bekannte Beziehung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Abgabe am Donnerstag, 5. Dezember, vor der Vorlesung.