FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

7. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Transformationen und Differentialoperatoren $1 + 2 + 1 = 4$ Punkte

Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ zweimal stetig differenzierbar. Die *radiale Ableitung* D_{R} und die *Winkelableitung* D_{W} seien folgendermaßen definiert:
Ist

$$x = r\theta(\varphi), \quad \theta(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad r \in [0, \infty),\ \varphi \in [0, 2\pi),$$

so gilt für $h(r, \varphi) = f\big(r\theta(\varphi)\big) = f(x)$:

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{R}} f(x) &= r \frac{\partial}{\partial r} h(r, \varphi), \\ D_{\mathrm{W}} f(x) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} h(r, \varphi). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie die Darstellungen

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{R}} f(x) &= \langle \nabla f(x), x \rangle, \\ D_{\mathrm{W}} f(x) &= \langle \nabla f(x), (-x_2, x_1) \rangle. \end{aligned}$$

b) Verwenden Sie die Rechenregeln der Fourier-Transformation, um folgende Identitäten nachzuweisen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} D_{\mathrm{R}} &= -(D_{\mathrm{R}} + 2)\mathcal{F}, \\ \mathcal{F} D_{\mathrm{R}}^2 &= (D_{\mathrm{R}}^2 + 4D_{\mathrm{R}} + 4)\mathcal{F}, \\ \mathcal{F} D_{\mathrm{W}} &= D_{\mathrm{W}} \mathcal{F}. \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Projektionssatzes:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta D_{\mathrm{R}} &= (D_s - 1)\mathcal{R}_\theta, \\ \mathcal{R}_\theta D_{\mathrm{R}}^2 &= (D_s^2 - 2D_s + 1)\mathcal{R}_\theta, \end{aligned}$$

wobei $D_s = s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ gilt.

2. Aufgabe Rotationsoperatoren 1 + 1 + 2 = 4 Punkte

Sei $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Rotationsmatrix (unitär mit $\det U = 1$) und $D_1^U f(x) := f(U^{\mathrm{T}}x)$. Zeigen Sie:

a) Es gilt die Invarianzeigenschaft

$$\mathcal{R}D_1^U f = D_2^U \mathcal{R}f$$

wobei D_2^U auf die erste Komponente in C^{n-1} wirkt.

b) Die Operatoren D_1^U und $\mathcal{R}^*\mathcal{R}$ kommutieren.

c) Für $d = 2$ sind die Funktionen der Form $f(r\omega(\theta)) = f_l(r)\exp(il\theta),\ l \in \mathbb{Z}$ Eigenfunktionen des Operators D_1^U.

3. Aufgabe Radon-Transformation und Faltung 1,5 + 1,5 + 3 = 6 Punkte

Für zwei Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(C^{N-1})$ bezeichne

$$(\varphi_1 *_1 \varphi_2)(\theta, s) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\theta, s-t)\varphi_2(\theta, t)dt$$

die eindimensionale Faltung von φ_1 mit φ_2 im zweiten Argument. Seien $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ und $g \in \mathcal{S}(C^{N-1})$ gegeben.

a) Zeigen Sie die Gleichung

$$\mathcal{R}(f * h) = \mathcal{R}f *_1 \mathcal{R}h$$

  i) über die Definition der Radon-Transformation,

  ii) durch geschicktes Anwenden der Rechenregeln.

b) Beweisen Sie

$$(\mathcal{R}^*g) * f = \mathcal{R}^*(g *_1 \mathcal{R}f).$$

4. Aufgabe Rückprojektion 2 Punkte

Wir betrachten die Gleichung $\mathcal{R}^*g = f$. Zeigen Sie für gegebenes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ die Darstellung

$$g(\theta, s) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{N-1}\widehat{f}(\sigma\theta)\exp(is\sigma)d\sigma.$$

Abgabe bis Donnerstag, 12. Dezember, 14:00 Uhr, im Briefkasten des Lehrstuhls Louis (Geb. E2₄, EG) oder bei den Übungsleitern (Geb. E1₁, 4. Stock, Raum 4.16 oder 4.09).

Die Übung am Dienstag, 10. Dezember, beginnt bereits um 14:00 Uhr.