FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

8. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Gefilterte Rückprojektion **2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte**

Das Filter e_γ sei definiert durch

$$\mathcal{F}e_\gamma(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1}{2}-n}\,|\sigma|^{n-1}\,\mathcal{F}\Phi(\gamma^{-1}\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

mit einem Tiefpassfilter Φ.

a) Berechnen Sie e_γ für $n = 3$ Dimensionen und das Tiefpassfilter

$$\mathcal{F}\Phi(\sigma) = \begin{cases} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\sigma\pi}{2}\right), & |\sigma| < 1 \\ 0, & |\sigma| \geq 1. \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass für $\gamma = \frac{\pi}{h},\ s_l = lh,\ l = -q, \dots, q,\ h = \frac{1}{q}$ folgendes gilt:

$$e_\gamma(s_l) = \frac{\gamma^3}{8\pi^5}\begin{cases} 2, & l = 0 \\ -1, & |l| = 1 \\ 0, & |l| > 1. \end{cases}$$

c) Die diskrete Faltung von $f, g \in S(C^2)$ sei definiert als

$$(f *_h g)(\theta, s_k) = h \sum_{l=-q}^{q} f(\theta, s_k - s_l)\, g(\theta, s_l), \quad \theta \in \mathcal{S}^2,\ k \in \{-q, \dots, q\}$$

mit s_l wie in b). Berechnen Sie $e_\gamma *_h g$, mit $e_\gamma(\theta, s) = e_\gamma(s)$ aus a). Begründen Sie, weshalb e_γ ein geeignetes Filter zur Rekonstruktion von f aus Daten $g_l(\theta) = \mathcal{R}_3 f(\theta, s_l)$ ist (Hinweis: Aufgabe 2b)).

d) Welche Funktion wird statt f rekonstruiert, wenn in c) Daten $\mathcal{R}_2 f$ der zweidimensionalen Radon-Transformation vorliegen?

2. Aufgabe Rekonstruktion mit Glättung $\quad 1 + 2 + 1 + 1 = 5$ Punkte

a) Es sei $*_1$ die eindimensionale Faltung auf C^{n-1} bzgl. des zweiten Arguments. Zeigen Sie für $g, h \in S(C^{n-1})$:

$$\frac{\partial}{\partial s}(g *_1 h) = \Big(\frac{\partial}{\partial s}\, g\Big) *_1 h = g *_1 \Big(\frac{\partial}{\partial s}\, h\Big).$$

b) Geben Sie die Inversionsformeln (vgl. Satz 3.2.2) für die 3D-Radon-Transformation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_3$ für $\alpha = 0$ und $\alpha = 2$ *explizit* an.

c) Weisen Sie die Identitäten

$$f * E_\gamma(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{S^2} \int\limits_{\mathbb{R}} (\mathcal{R}f)^{(k)}(\theta, t)\, (\mathcal{R}E_\gamma)^{(2-k)}(\theta, \langle x, \theta\rangle - t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\theta, \quad k = 0, 1, 2$$

für $f, E_\gamma \in S(\mathbb{R}^3)$ nach, wobei die Ableitungen $g^{(k)}$ sich auf das zweite Argument beziehen.

d) Berechnen Sie $\mathcal{R}E_\gamma$ für die Gauß-Funktion

$$E_\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi\gamma^2)^{3/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2\gamma^2}\Big)$$

und werten Sie die Formel in c) für $k = 0$ aus.

3. Aufgabe Defekter Pixel $\quad 3 + 1 = 4$ Punkte

Durch einen technischen Defekt im Computertomograph liegen für einen Datenpunkt (θ_{j_0}, s_{l_0}) keine Daten vor, d. h. der Datensatz ist gegeben durch

$$\tilde{g}(\theta_j, s_l) = \begin{cases} 0, & (j, l) = (j_0, l_0) \\ \mathcal{R}f(\theta_j, s_l), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei gelte wie üblich $\theta_j = \theta(\varphi_j)$, $\varphi_j = \frac{2\pi}{p} j$, $j \in \{0, \dots, p-1\}$ für die Richtungen sowie $s_l = lh$, $l \in \{-q, \dots, q\}$, $h = \frac{1}{q}$ für den Detektor.

a) Stellen Sie den Fehler im rekonstruierten Bild dar, wenn der Algorithmus der gefilterten Rückprojektion mit dem Shepp-Logan-Filter verwendet wird.

b) Für welche Rekonstruktionspunkte x wird der Fehler maximal? Wie groß ist dieser maximale Fehler?

Abgabe am Donnerstag, 9. Januar 2014, vor der Vorlesung.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!