FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. Dr. h. c. A. K. Louis
Dr. H. Kohr
J. Vogelgesang, M.Sc.

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

9. Übung zu 'Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2013/14

1. Aufgabe Gefilterte Rückprojektion — 2 Punkte

Wir betrachten erneut das Verfahren der gefilterten Rückprojektion. Das Filter e_γ sei definiert durch

$$\mathcal{F}e_\gamma(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1}{2}-n}\,|\sigma|^{n-1}\,\mathcal{F}\Phi(\gamma^{-1}\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

mit einem Tiefpassfilter Φ. Zeigen Sie für alle $\rho > 0$:

$$e_\gamma(\rho s) = \rho^{-n} e_{\rho\gamma}(s).$$

2. Aufgabe SWZ und semi-diskrete Operatoren — 1 + 2 + 2 = 5 Punkte

Für jeden kompakten Operator $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ zwischen zwei Hilberträumen X und Y existiert die *Singulärwertzerlegung* $\{v_\nu, u_\nu; \sigma_\nu\}_{\nu\geq 0}$, d.h. es existieren vollständige Orthonormalsysteme $\{v_\nu\} \subset X$ bzw. $\{u_\nu\} \subset Y$ für $\mathcal{N}(A)^\perp$ bzw. $\mathcal{N}(A^*)^\perp$, und eine Folge positiver Zahlen $\{\sigma_\nu\} \subset \mathbb{R}_+$ mit

$$Av_\nu = \sigma_\nu u_\nu \quad \text{und} \quad A^* u_\nu = \sigma_\nu v_\nu.$$

Seien nun X, Y komplexe Hilberträume und $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit singulärem System $\{v_\nu, u_\nu; \sigma_\nu\}_{\nu\geq 0}$. Zu A definieren wir den diskretisierten Operator A_D wie folgt:

$$A_D : X \to \mathbb{C}^N, \quad [A_D f]_n = \langle Af, \psi_n\rangle_Y \text{ mit } \psi_n \in Y \text{ für } n = 1, \ldots, N.$$

a) Zeigen Sie: Für alle $f \in X$ gilt die Darstellung

$$Af = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \langle f, v_\nu\rangle_X u_\nu.$$

b) Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator $A_D^* : \mathbb{C}^N \to X$ die folgende Gestalt hat:

$$A_D^* g = \sum_{n=1}^{N} g_n \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\langle u_\nu, \psi_n\rangle_Y} A^* u_\nu,$$

wobei g_n die n-te Komponente von g bezeichnet.

c) Zeigen Sie für die Matrix $A_D A_D^*$ die Darstellung

$$A_D A_D^* = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu^2 \langle \psi_n, u_\nu\rangle_Y \langle u_\nu, \psi_m\rangle_Y \right)_{m,n=1}^{N}.$$

3. Aufgabe Semi-diskrete Radon-Transformation I $\quad 1 + 3 = 4$ Punkte

Der Operator $\mathcal{R}_D : L_2(\Omega) \to \mathbb{C}^N$ mit $\Omega = V(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ sei wie folgt definiert:

$$[\mathcal{R}_D f]_{jQ+l} = \mathcal{R}f(\theta_j, s_l).$$

Hierbei bezeichne $\mathcal{R}$ die zweidimensionale Radon-Transformation $\mathcal{R} : L_2(\Omega) \to L_2(Z, w^{-1})$ mit $w(s) := \sqrt{1-s^2}$, und

$$\begin{aligned}
&s_l = l/q,\ l = -q+1, \dots, q-1,\ Q = 2q-1,\\
&\theta_j = (\cos(\phi_j), \sin(\phi_j))^T, \phi_j = j2\pi/K,\ j = 0, \dots, K-1,\\
&N = KQ.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie:

$$U_n(\cos(\alpha)) = \sum_{\substack{k=-n\\ k+n \text{ gerade}}}^{n} \exp(ik\alpha),$$

wobei U_n die Tschebyscheff Polynome 2. Art bezeichnen.

b) Stellen Sie die Matrix $\mathcal{R}_D\mathcal{R}_D^*$ mit Hilfe des sing. Systems der Radon-Transformation dar.

Hinweis:

i) Benutzen Sie Aufgabe 2 mit $\psi_{jQ+l} = \sqrt{1-s^2}\delta_{(\theta_j, s_l)}$, d.h. es gilt $\langle \mathcal{R}f, \psi_{jQ+l}\rangle = \mathcal{R}f(\theta_j, s_l)$. („Naive" Rechnung genügt; nicht streng im Sinne von Distributionen nachzurechnen.)

ii) Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung hat das singuläre System die folgende Gestalt:

$$\{(v_{mk}, u_{mk}; \sigma_{mk}) :\ m \geq 0,\ k \in \mathbb{Z} : |k| \leq m,\ m+k \text{ gerade}\}.$$

4. Aufgabe Semi-diskrete Radon-Transformation II $\quad 2 + 3 = 5$ Punkte

Zeigen Sie für den Operator $\mathcal{R}_D$ aus Aufgabe 3:

a) $\mathcal{R}_D$ ist surjektiv

b) Die Matrix $\mathcal{R}_D\mathcal{R}_D^*$ ist invertierbar.

Hinweis:
Zeigen Sie zunächst, dass für einen kompakten Operator A zwischen zwei Hilberträumen

$$\mathcal{N}(A^*) = R(A)^\perp$$

gilt, wobei $\mathcal{N}$ den Nullraum, R und das Bild bezeichnet.

Abgabe am Donnerstag, 16. Januar, vor der Vorlesung.