UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

1. Übungsblatt zu ”Theorie und Numerik von Integraltransformationen”

Aufgabe 1

Wir definieren eine Funktion *gerade* (bzw. *ungerade*), falls $f(x) = f(-x)$, (bzw. $f(x) = -f(-x)$).

1. Zeigen Sie: Jede Funktion lässt sich als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben.
2. Verifizieren Sie:
   - Ist f gerade, dann ist $\hat{f}$ gerade.
   - Ist f reell und gerade, dann ist $\hat{f}$ reell und gerade.
   - Ist f imaginär und ungerade, dann ist $\hat{f}$ reell und ungerade.
   - Ist $Re(f)$ ungerade und $Im(f)$ gerade, dann ist $\hat{f}$ imaginär.

Aufgabe 2

Es seien die komplexe Zahl α und die Funktion

$$f(t) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha|t|}.$$

Berechnen Sie die Fourier Transformierte von f.

Aufgabe 3

Sei f ein Signal d.h. $f \in L^2(I\!R) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, ||f||^2 := \int |f(x)|^2 dx < \infty\}, f \neq 0.$

- Existiert
$$t_0 = \frac{1}{||f||^2} \int_{I\!R} t|f(t)|^2 dt,$$
so heißt t_0 der *mittlere Zeitpunkt* des Signals und
$$\Delta t = \frac{1}{||f||} \sqrt{\int_{I\!R} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt}$$
seine Signalbreite.
Ist $\Delta t < \infty,$ dann heißt das Signal im *Zeitbereich lokalisiert.*

- Existiert
$$\omega_0 = \frac{1}{||\hat{f}||^2} \int_{I\!R} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$
so heißt ω_0 die *mittlere Frequenz* des Signals und
$$\Delta\omega = \frac{1}{||\hat{f}||} \sqrt{\int_{I\!R} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}$$
seine Brandbreite.
Ist $\Delta\omega < \infty,$ dann heißt das Signal im *Frequenzenbereich lokalisiert.*

Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ ein lokalisiertes Signal mit mitteleren Zeitpunkt $t_0,$ mittlerer Frequenz $w_0,$ Signalbreite Δt_0 und Bandbreite $\Delta\omega_0.$
Weiter sei das Signal g definiert durch

$$g(t) = e^{-i\omega_0 t} f(t + t_0).$$

Zeigen Sie

1. Das Signal g hat mittleren Zeitpunkt 0, mittelere Frequenz 0, Signalbreite Δt und Bandbreite $\Delta\omega.$

2. Berechnene Sie den mittleren Zeitpunkt, die mittelere Frequenz, die Signalbreite und Bandbreite für das modulierte Gauß-Signal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(t) = Ae^{i\nu t} e^{-c(t-b)^2}$ mit $A \in \mathbb{C}, A \neq 0, \nu, b \in \mathbb{R}$ und $c > 0.$

Abgabe: Dienstag, 04.11.2014, vor der Vorlesung.
Die Übungen finden Donnerstags, erster Termin am 06.11.2014, von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (318) des Gebäudes E2.4 (3. EG) statt.