



10. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1 (Mexikanischer Hut)

Es sei der Mexikanische Hut als Wavelet  $\psi$ . Berechnen Sie  $L_\psi f(a, b)$  für die Funktion  $f(t) = e^{i\alpha t}$  mit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Bestimmen Sie für welches  $a$  der Wert  $|L_\psi f(a, b)|$  maximal wird.  
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 2 (Zerebrale Autoregulation)

Es sei wieder das Problem der zerebralen Autoregulation

$$g = Af$$

mit dem Operator  $Af = k * f$  und dem CAR-Kern  $k \in L^2(\mathbb{R})$ .

Weiter sei  $\psi$  ein Wavelet. Zeigen Sie

$$L_\psi g(a, b) = (L_\psi k(a, \cdot) * f)(b), \quad a \neq 0, b \in \mathbb{R}.$$

Für  $f(t) = e^{i\alpha t}, t \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , zeigen Sie

$$k(t) = c_\psi^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^2} |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) L_\psi g(a, b) e^{-i\alpha b} \frac{da db}{a^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Aufgabe 3 (Wavelet auf Sobolevräume)

Sei  $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^N(\mathbb{R}), N \in \mathbb{N}, \phi \neq 0$ , mit

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \phi^{(k)}(t) = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Weiter sei  $\phi^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie, dass  $\psi := \frac{\phi^{(N)}}{\|\phi^{(N)}\|}$  ein Wavelet ist.

Zeigen Sie

$$L_\psi f(a, \cdot) \in H^{\alpha+N}(\mathbb{R}) \quad \text{für } f \in H^\alpha(\mathbb{R}), a \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass  $L_\psi$  eine Isometrie von  $H^\alpha(\mathbb{R}), \alpha \geq 0$ , in den Faserraum

$$\mathcal{F}^\alpha := \left\{ g : (a, b) \mapsto g_a(b), g_a \in H^\alpha(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \|g\|_{\mathcal{F}^\alpha} := \int_{\mathbb{R}} \|g_a\|_{H^\alpha}^2 \frac{da}{a^2} < \infty \right\}$$

definiert.

**Abgabe:** Donnerstag, den 27.01.2015 vor der Vorlesung.

Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.