UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

11. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1 *Wavelets und Differentialoperatoren*

Es seien $\psi \in \mathcal{S}(I\!R)$ ein Wavelet. Weiter sei p ein Polynom vom Grad n und sei $D = p(\frac{d}{dx})$ der zugehörige Differentialoperator.
Zeigen Sie

$$c_\psi L_\psi(Df)(a,\cdot) = c_{D^*\psi} L_D *_\psi f(a,\cdot)$$

mit $D^* = p(-a^{-1}\frac{d}{dx})$.
Weisen Sie nach, dass D_ψ die Zulässigkeitsbedingung erfüllt, wenn ψ zulässig ist und wenn $\psi, \psi', \ldots, \psi^{(n)} \in L^2(I\!R)$.
Zeigen Sie, dass

$$f = c_\psi c_{D^*\psi} L^*_{D^*\psi} L_\psi g$$

die Differentialgleichung $Df = g$ löst.

Aufgabe 2 *Multi-Skalen-Analyse*

Der B-Spline n-ter Ordnung B_n wird rekursiv durch

$$\begin{aligned} B_0(x) &= \chi_{[-1,1]}(2x), \\ B_{n+1}(x) &= (B_n * B_0)(x) \end{aligned}$$

definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir diejenige Multi-Skalen-Analyse, die durch

$$V_0 = \overline{\text{span}\{B_n(\cdot - m), m \in \mathbb{Z}\}}$$

erzeugt wird.
Es sei Φ die zugehörige Orthogonalisierungsfunktion.
Zeigen Sie

$$\Phi(\omega) = \sin^{2(n+1)}(\omega/2)\, S_n(\omega/2),\ \omega \in \mathbb{R},$$

mit

$$S_n(\omega) = \sum_{k\mathbb{Z}} \frac{1}{(\omega + k\pi)^{2(n+1)}}.$$

Weiter zeigen Sie

1. $S_0(\omega) = \frac{1}{\sin^2(\omega)}$,
2. $S_n(\omega) = \frac{1}{(2n+1)!}\frac{d^{2n}S_0}{d\omega^{2n}}(\omega)$,

für $\omega \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 *Eine orthonormale Basis*

Wir benutzen wieder die Bezeichnungen der Aufgabe 2. Wir möchten nun das Funktionensystem

$$V_0 = \overline{\text{span}\{B_n(\cdot - m), m \in \mathbb{Z}\}}$$

für die B-Spline der Ordnung $n \geq 1$ orthogonalisieren. Zu B_n sei φ_n die entsprechende orthogonale Skalierungsfunktion und ψ_n das entsprechende Wavelet.
Zeigen Sie, dass die Darstellung der Fourier-Transformation durch

$$\hat{\psi}_n(\omega) = \frac{-2^{n+1}e^{-i\omega/2}}{\sqrt{2\pi}\omega^{n+1}} \left(\frac{S_n(\pi/2 - \omega/4)}{S_n(\omega/4)S_n(\omega/2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben ist.
Zeigen Sie, dass $\{2^{-m/2}\psi_n(2^{-m}x - k), m, k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormale Basis des Raumes $L^2(\mathbb{R})$.

Tipp: Bestimmen Sie das Filter H, so dass $\hat{\varphi}_n(2\omega) = H(\omega)\hat{\varphi}_n(\omega)$.

Abgabe: Dienstag, den 03.02.2015 vor der Vorlesung.
Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.