



**12. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'**

**Aufgabe 1** *Wavelet-Bestimmung*

Sei  $\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \chi_{[k, k+1]}$  eine stückweise konstante Funktion, die ein Wavelet ist.

Zeigen Sie, dass die Zulässigkeitsbedingung in diesem Fall

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = 0$$

impliziert.

Bestimmen Sie  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , so dass  $\psi$  ein Wavelet der Ordnung 1, 2 bzw. 3 ist.

**Aufgabe 2** *Eine Interpolationsbedingung*

Es sei  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  eine Funktion, die eine Skalierungsgleichung mit Skalierungskoeffizienten  $\{h_k\}$  erfüllt. Es gilt zusätzlich die Interpolationsbedingung

$$\varphi(m) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \neq 0 \\ 1 & \text{falls } m = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$H(\omega) = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$$

die Interpolationsbedingung

$$H(\omega) + H(\omega + \pi) = 1$$

erfüllt.

**Aufgabe 3** *Calderons reproduzierende Formel*

Es sei  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  ein Wavelet, so dass

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{a} da \equiv \frac{1}{2\pi}.$$

Zeigen Sie die *Calderons reproduzierende Formel*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} (\psi_a * \psi_a * f)(x) \frac{da}{a}$$

für  $\psi_a(x) := a^{-1}\psi(x/a)$  und  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

Es sei

$$f_t(x) := c_\psi^{-1/2} \int_{|a|>t} \int_{\mathbb{R}} L_\psi f(a, b) |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2}.$$

Zeigen Sie

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wie kann man den Parameter  $t$  interpretieren?

**Abgabe:** Dienstag, den 10.02.2015 vor der Vorlesung.

Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.